Crainte maladive de tout perdre (sic ;-)) (Denise Vella-Chemla, 10.11.2019)

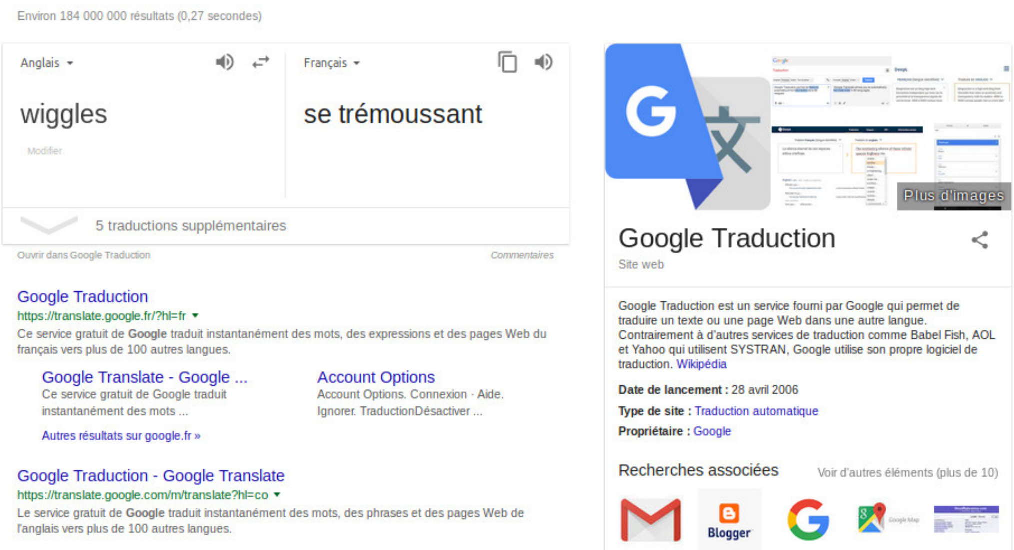
Les éléments ci-dessous sont une sauvegarde de ce que j'avais posté sur Google+, qui a été perdu, que j'ai reposté sur Blogger, je préfère le garder sous format pdf, c'est plus sûr !

1) Wiggles

Petit phare dans la nuit, petite magie du jour, qui m'amène le sourire : j'avais lu ça au sujet de la fonction $J(x)$ liée à la fonction ζ de Riemann :

Note that all the "wiggles" are in the term $\sum Li(x^\rho)$.

J'ai voulu m'assurer que comme je le pressentais wiggles voulait dire oscillations et j'ai trouvé ça, je trouve sympathique d'imaginer une courbe qui se trémousse * !



2) Soustraire les carrés des parties imaginaires des zéros de zêta du carré de la partie imaginaire du premier zéro de zêta puis diviser par $e^{2\pi}$

C'est marrant ce que l'on obtient lorsqu'on prend les carrés des parties réelles des zéros de zêta, qu'on leur soustrait le carré de la partie réelle du premier zéro de zêta et qu'on divise ces différences par $e^{2\pi}$.

$e^{2\pi} = 535.492$
$zeros[1] = 14.1347$ au carre 199.79 auquel on soustrait 199.79 et qu'on divise par $e^{2\pi} \rightarrow 0.373097$
zeros$[2] = 21.022 \rightarrow 441.926 \rightarrow 0.825272$
$zeros[3] = 25.0109 \rightarrow 625.543 \rightarrow 1.16817$
$zeros[4] = 30.4249 \rightarrow 925.673 \rightarrow 1.72864$
$zeros[5] = 32.9351 \rightarrow 1084.72 \rightarrow 2.02565$
$zeros[6] = 37.5862 \rightarrow 1412.72 \rightarrow 2.63818$
$zeros[7] = 40.9187 \rightarrow 1674.34 \rightarrow 3.12674$
$zeros[8] = 43.3271 \rightarrow 1877.24 \rightarrow 3.50563$
$zeros[9] = 48.0052 \rightarrow 2304.49 \rightarrow 4.30351$
$zeros[10] = 49.7738 \rightarrow 2477.43 \rightarrow 4.62647$
$zeros[11] = 52.9703 \rightarrow 2805.85 \rightarrow 5.23977$
$zeros[12] = 56.4462 \rightarrow 3186.18 \rightarrow 5.95001$

∗. J'avais posté ça sur Google+ le 1er novembre 2018, tout a été perdu en avril 2019 quand Google+ a fermé, je l'ai reposté sur Blogger, là, https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/wiggles.html

$zeros[13] = 59.347 \rightarrow 3522.07 \rightarrow 6.57727$
$zeros[14] = 60.8318 \rightarrow 3700.51 \rightarrow 6.91048$
$zeros[15] = 65.1125 \rightarrow 4239.64 \rightarrow 7.91729$
$zeros[16] = 67.0798 \rightarrow 4499.7 \rightarrow 8.40293$
$zeros[17] = 69.5464 \rightarrow 4836.7 \rightarrow 9.03226$
$zeros[18] = 72.0672 \rightarrow 5193.68 \rightarrow 9.69889$
$zeros[19] = 75.7047 \rightarrow 5731.2 \rightarrow 10.7027$
$zeros[20] = 77.1448 \rightarrow 5951.33 \rightarrow 11.1138$
$zeros[21] = 79.3374 \rightarrow 6294.42 \rightarrow 11.7545$
$zeros[22] = 82.9104 \rightarrow 6874.13 \rightarrow 12.837$
$zeros[23] = 84.7355 \rightarrow 7180.1 \rightarrow 13.4084$
$zeros[24] = 87.4253 \rightarrow 7643.18 \rightarrow 14.2732$
$zeros[25] = 88.8091 \rightarrow 7887.06 \rightarrow 14.7286$

Et ça continue comme ça, au rythme d'environ un nombre de plus tous les 2 nombres environ, et ça, très loin (enfin, assez loin... Mais face à l'infini... enfin... cacahuètes, quoi) [†].

3) Que font là π et sa racine ? (enfin presque)

Tiens, c'est marrant ! [‡]

On prend le nombre premier 13, et on l'élève à la puissance du second zéro de zêta qui vaut

$$1/2 + 21.022039638771554992628479593896916 2i \ ,$$

on trouve :

$$-3.14073664252166 - 1.7708114925993i$$

Ces nombres réels (la partie réelle et la partie imaginaire du complexe obtenu) “ressemblent” à

$$\pi = 3.14159265359...$$

et à sa racine

$$\sqrt{\pi} = 1.77245385091...$$

On peut même dire que ce sont les mêmes nombres, jusqu'au 100ème !

Ca surprend...

4) Diviser les parties imaginaires des zéros par $\frac{\pi^2}{4}$

Un autre jeu expérimental sympathique, on obtient un peu pareil qu'en 1) , cette augmentation de 1 environ un coup sur deux, au niveau de la partie imaginaire [§].

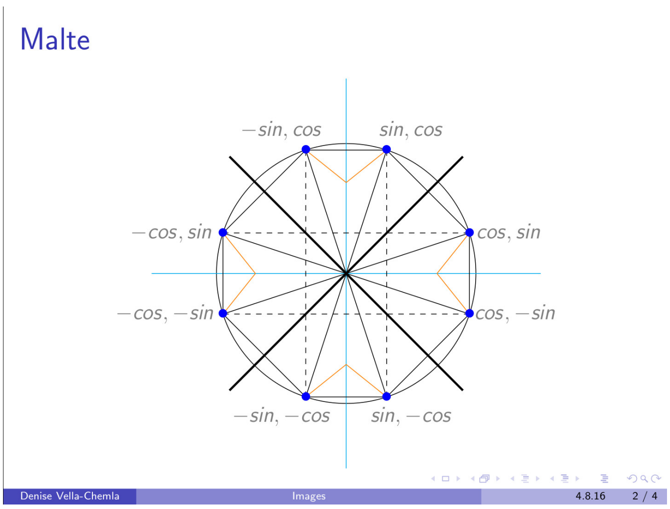
Une nouvelle expérience marrante : prendre les parties imaginaires des zéros de zêta et les diviser par $\frac{\pi^2}{4}$. On choisit de diviser par $\frac{\pi^2}{4}$ parce que $\frac{\pi^2}{4}$ est le carré de $\frac{\pi}{2}$ et qu'on pense que cet angle de $\frac{\pi}{2}$ est important parce qu'il contient toutes les symétries entre les sinus et les cosinus qu'on a montrées sur une sorte de croix de Malte et comme on a trouvé une somme de somme de cosinus qui contient toute l'information nécessaire à la caractérisation des nombres premiers, on se dit que ce groupe de rotations et symétries à 4 ou 8 éléments est forcément important (groupe des symétries et rotations du carré).

†. Posté initialement sur Google+ le 21.2.2018, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/jeu-avec-la-fonction-zeta.html

‡. Posté initialement sur Google+ le 22.9.2018, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/jeu-avec-la-fonction-zeta.html

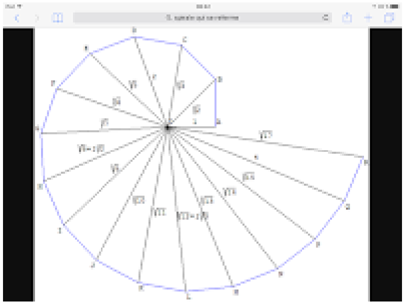
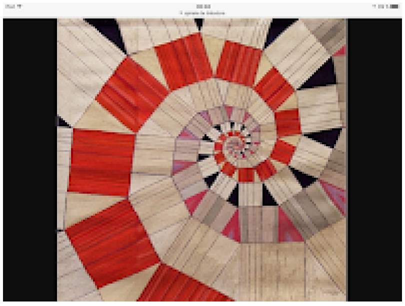
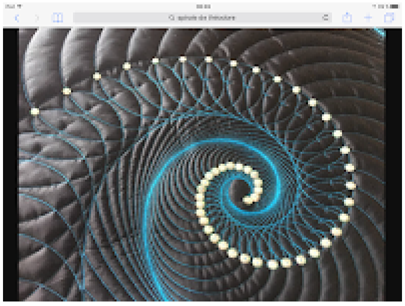
§. posté initialement sur Google+ le 28.4.2018, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/jeu-avec-la-fonction-zeta.html

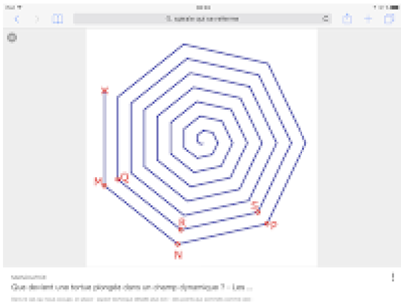
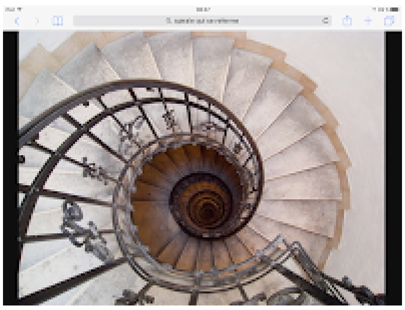
1	→	(0.202642, 5.72859)	39	→	(0.202642, 49.1895)	77	→	(0.202642, 79.1381)
2	→	(0.202642, 8.51991)	40	→	(0.202642, 49.8285)	78	→	(0.202642, 79.791)
3	→	(0.202642, 10.1365)	41	→	(0.202642, 50.3594)	79	→	(0.202642, 80.2526
4	→	(0.202642, 12.3307)	42	→	(0.202642, 51.6806)	80	→	(0.202642, 81.5695)
5	→	(0.202642, 13.3481)	43	→	(0.202642, 52.5163)	81	→	(0.202642, 82.0676)
6	→	(0.202642, 15.2331)	44	→	(0.202642, 53.1278)	82	→	(0.202642, 82.755)
7	→	(0.202642, 16.5837)	45	→	(0.202642, 54.1046)	83	→	(0.202642, 83.2433
8	→	(0.202642, 17.5598)	46	→	(0.202642, 54.6148)	84	→	(0.202642, 84.2612)
9	→	(0.202642, 19.4558)	47	→	(0.202642, 55.9763)	85	→	(0.202642, 84.9382)
10	→	(0.202642, 20.1726	48	→	(0.202642, 56.633)	86	→	(0.202642, 85.7951)
11	→	(0.202642, 21.4681)	49	→	(0.202642, 57.1953	87	→	(0.202642, 86.4667)
12	→	(0.202642, 22.8768)	50	→	(0.202642, 58.001)	88	→	(0.202642, 86.9526)
13	→	(0.202642, 24.0525)	51	→	(0.202642, 59.172)	89	→	(0.202642, 87.6102)
14	→	(0.202642, 24.6542)	52	→	(0.202642, 59.7482	90	→	(0.202642, 88.7848)
15	→	(0.202642, 26.3891)	53	→	(0.202642, 60.8144)	91	→	(0.202642, 89.4524)
16	→	(0.202642, 27.1864)	54	→	(0.202642, 61.1677)	92	→	(0.202642, 89.7425)
17	→	(0.202642, 28.1861)	55	→	(0.202642, 62.0186)	93	→	(0.202642, 90.7866)
18	→	(0.202642, 29.2077)	56	→	(0.202642, 63.2702)	94	→	(0.202642, 91.1823)
19	→	(0.202642, 30.682)	57	→	(0.202642, 63.8719)	95	→	(0.202642, 92.1704)
20	→	(0.202642, 31.2656	58	→	(0.202642, 64.3795)	96	→	(0.202642, 92.947)
21	→	(0.202642, 32.1542)	59	→	(0.202642, 65.3274)	97	→	(0.202642, 93.7222
22	→	(0.202642, 33.6023)	60	→	(0.202642, 66.0739)	98	→	(0.202642, 94.0209)
23	→	(0.202642, 34.342)	61	→	(0.202642, 67.0896)	99	→	(0.202642, 94.7124)
24	→	(0.202642, 35.4321	62	→	(0.202642, 67.7573)	100	→	(0.202642, 95.8597
25	→	(0.202642, 35.993)	63	→	(0.202642, 68.5314)	101	→	(0.202642, 96.3645)
26	→	(0.202642, 37.4856	64	→	(0.202642, 68.8627)	102	→	(0.202642, 97.0882)
27	→	(0.202642, 38.3607)	65	→	(0.202642, 70.281)	103	→	(0.202642, 97.6935)
28	→	(0.202642, 38.8549)	66	→	(0.202642, 70.8252	104	→	(0.202642, 98.4126)
29	→	(0.202642, 40.0548)	67	→	(0.202642, 71.509)	105	→	(0.202642, 98.9182)
30	→	(0.202642, 41.0626)	68	→	(0.202642, 72.2936	106	→	(0.202642, 100.161)
31	→	(0.202642, 42.0384)	69	→	(0.202642, 72.9174)	107	→	(0.202642, 100.552)
32	→	(0.202642, 42.7359)	70	→	(0.202642, 73.8457)	108	→	(0.202642, 101.148)
33	→	(0.202642, 43.4338)	71	→	(0.202642, 74.9268)	109	→	(0.202642, 101.733)
34	→	(0.202642, 44.9986)	72	→	(0.202642, 75.2204)	110	→	(0.202642, 102.565)
35	→	(0.202642, 45.3411)	73	→	(0.202642, 75.881)	111	→	(0.202642, 103.472)
36	→	(0.202642, 46.3322)	74	→	(0.202642, 76.7675	112	→	(0.202642, 103.907)
37	→	(0.202642, 47.1049)	75	→	(0.202642, 77.8255)			
38	→	(0.202642, 48.1441)	76	→	(0.202642, 78.2523)			



5) Spirales

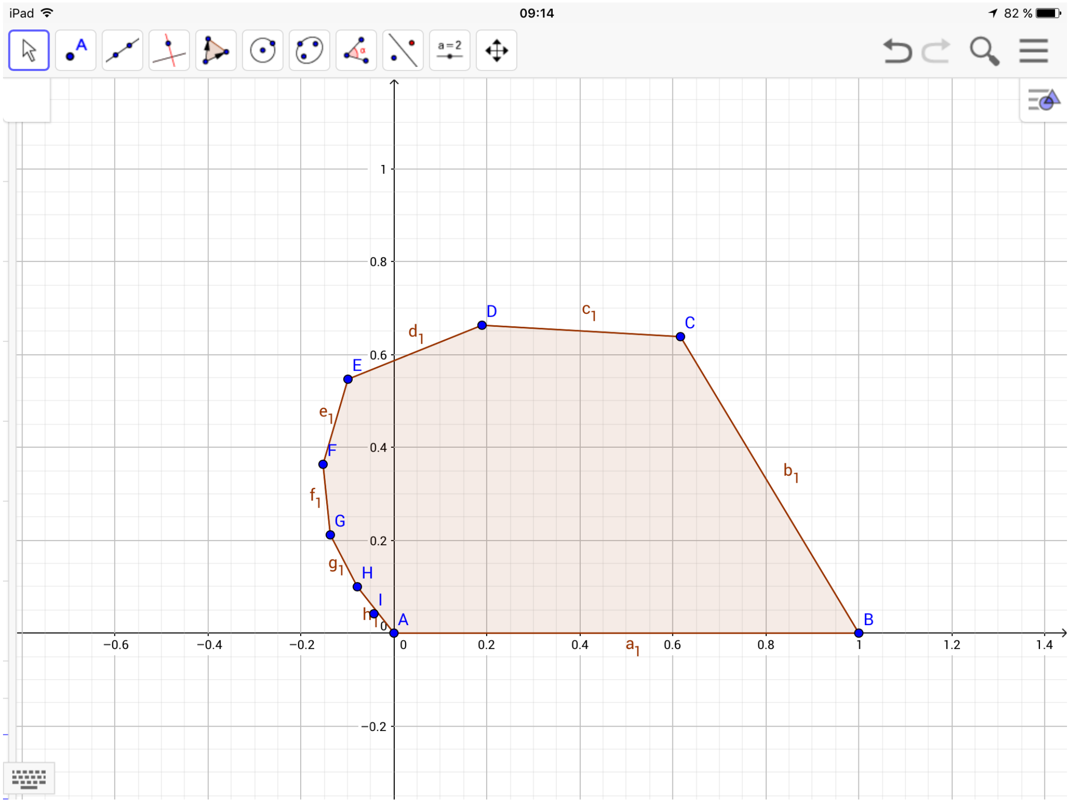
Continuer à chercher... ¶
D'abord, regarder des spirales suite au visionnage d'une video sur zêta.
Parfois, l'angle entre deux côtés successifs est constant, parfois, c'est la longueur du côté qui l'est.


Bien-sûr que ça se pourrait que deux polygones ayant le même nombre de côtés, avec des côtés de longueurs proportionnelles 2 à 2, et d'angles égaux 2 à 2, ayant notamment comme plus grand côté un côté de longueur 1 (allant de l'origine au point d'abscisse 1 de l'axe réel) et des côtés de plus en plus petits de tailles les images des entiers successifs par une certaine fonction, se referment tous les 2 sur 0.

¶. Posté initialement sur Google+ le 30.7.2017, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/spirales-diverses-et-variees-fin.html



Ce qu'il faudrait comprendre, c'est pourquoi les côtés ont forcément pour longueurs les inverses des racines carrées simples des entiers successifs et pas les inverses des racines cubiques, ou les inverses des racines quartiques ou les inverses des racines quintiques, ou même les inverses des racines 3.14-tiques (!).

Ces polygones acceptables font un peu penser à des "duals" de la spirale de Théodore, dont tous les côtés valent 1 et dont les segments vers l'origine de la spirale sont de longueurs les racines carrées des entiers successifs. Là, ce sont les côtés des polygones qui doivent avoir pour longueurs les inverses des racines (carrées possiblement mais impossiblement cubiques, quartiques, etc) des entiers successifs.

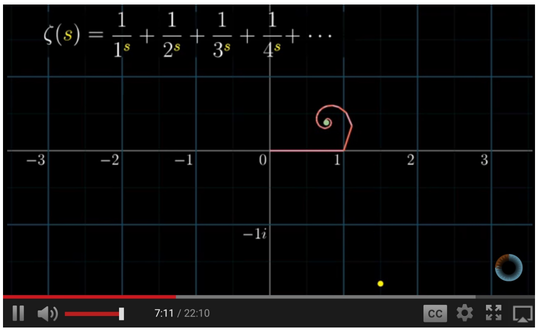
L'ange de la géométrie et le démon de l'algèbre, qu'ils disaient... Encore faudrait-il avoir une très bonne imagination visuelle.

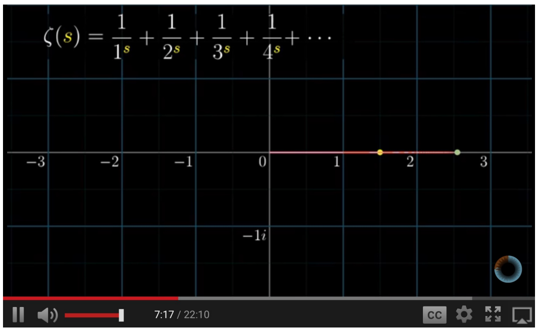
Se pourrait-il que le polygone à côtés de longueurs décroissantes associé à $Z'1$, dont les côtés seraient plus longs un à un de tous les côtés de $Z1$ mais dont les angles seraient identiques à ceux de $Z1$, aboutisse aussi, au terme du chemin, au point 0 ?

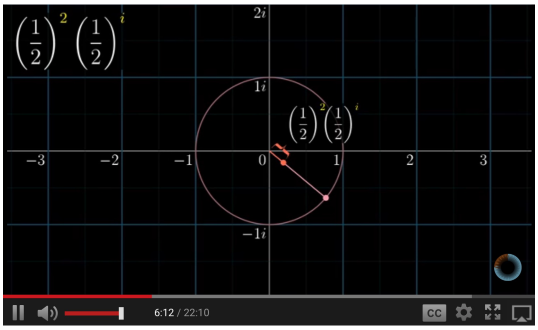
On pense à cela suite au visionnage de la video dont on a shooté des images en lien avec l'idée énoncée là.

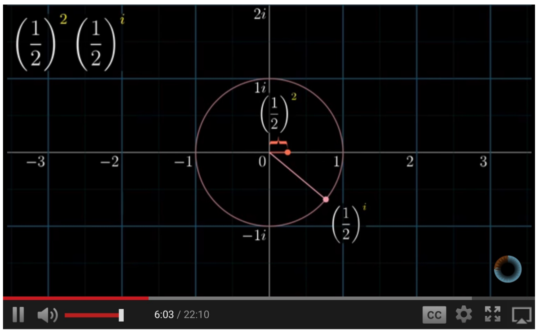
Si deux tels polygones ne pouvaient exister sous prétexte qu'ils ne pourraient tous deux "ramener à zéro" en ayant des côtés en rapport double l'un de l'autre (pour $2/3$ / $1/3$) ou bien en rapport quadruple l'un de l'autre par exemple (pour $4/5$ / $1/5$) ou en rapport $p-1$ l'un de l'autre (pour $p-1/p$ / $1/p$), alors peut-être que les seuls polygones acceptables seraient ceux pour lesquels le rapport des côtés est de 1 puisque $1/2 = 1 - 1/2$.

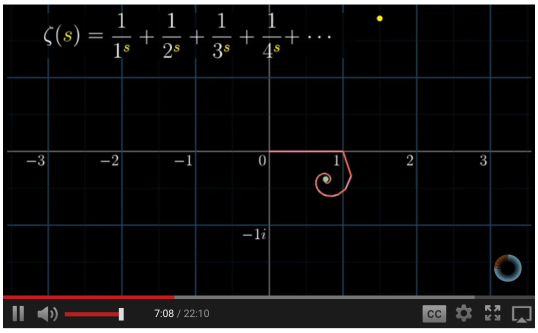
Sur les screenshots, s est le point jaune et $\zeta(s)$ est le point vert.


$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$
7:11 / 22:10

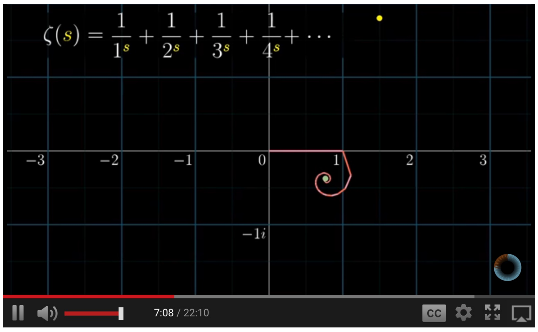

$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$
7:17 / 22:10


$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$
6:12 / 22:10

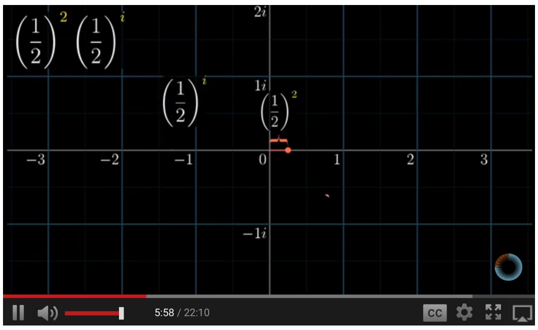

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$
6:03 / 22:10

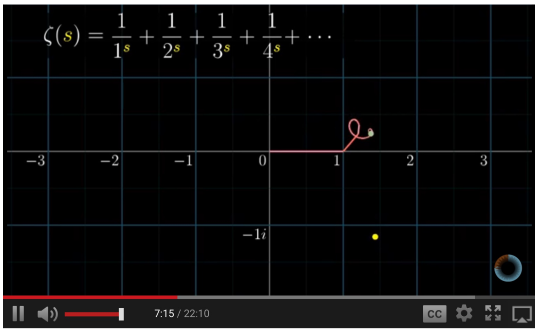

$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$
7:08 / 22:10

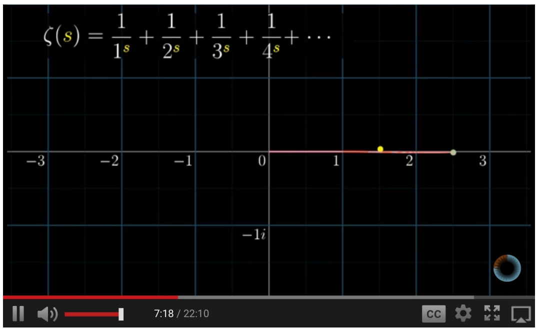

$\zeta(2+i) = \frac{1}{1^{2+i}} + \frac{1}{2^{2+i}} + \frac{1}{3^{2+i}} + \frac{1}{4^{2+i}} + \cdots = 1.15 - 0.44i$
$2+i$
6:40 / 22:10

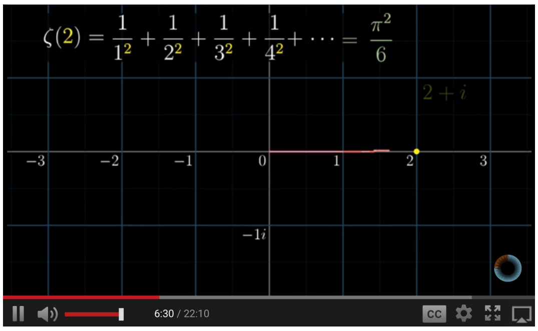

$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$
7:08 / 22:10

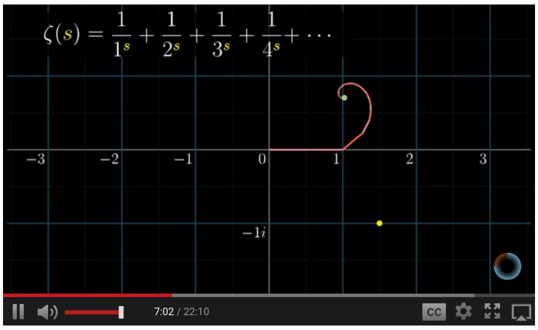

$\zeta(2+i) = \frac{1}{1^{2+i}} + \frac{1}{2^{2+i}} + \frac{1}{3^{2+i}} + \frac{1}{4^{2+i}} + \cdots = 1.15 - 0.44i$
$2+i$
6:40 / 22:10

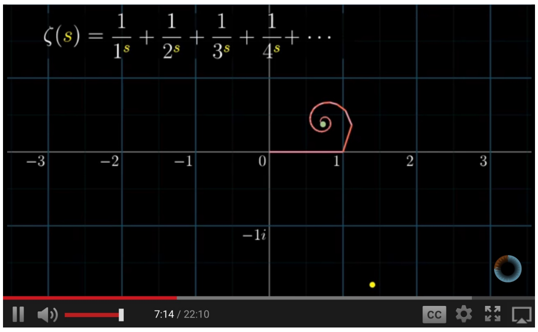

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^i$
5:58 / 22:10

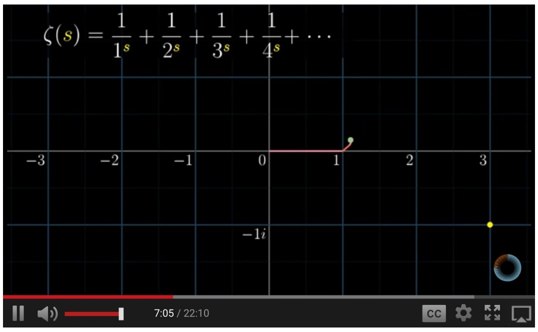

$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$
7:15 / 22:10









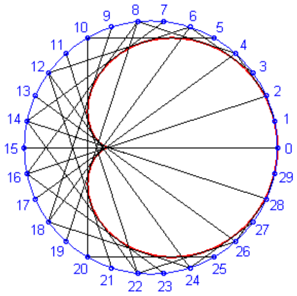


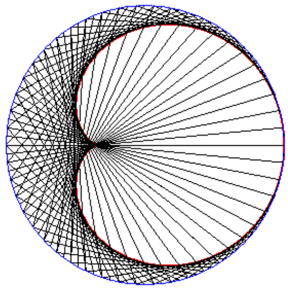
6) Une autre association d'idées [‖]

Cette association d'idées relie deux images, l'une montrant la façon dont les parties imaginaires des zéros de ζ tournent autour de 0 lorsque leur partie réelle est $\frac{1}{2}$ (alors que cette même spirale se décale lorsque la partie réelle est différente de $\frac{1}{2}$), et une autre montrant la façon de construire une cardioïde comme tangente à des segments se promenant.

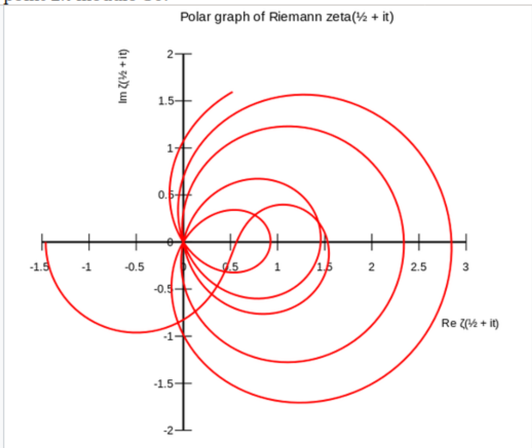
‖. jamais postée sur la toile

e) l'enveloppe d'une corde (PQ) du cercle de centre W et de rayon $\frac{3a}{2}$ (cercle circonscrit à la cardioïde), P et Q parcourant ce cercle dans le même sens, l'un ayant une vitesse double de l'autre (génération dite "de Cremona").





Ci-dessus, le point n est relié au point $2n$ modulo 30.

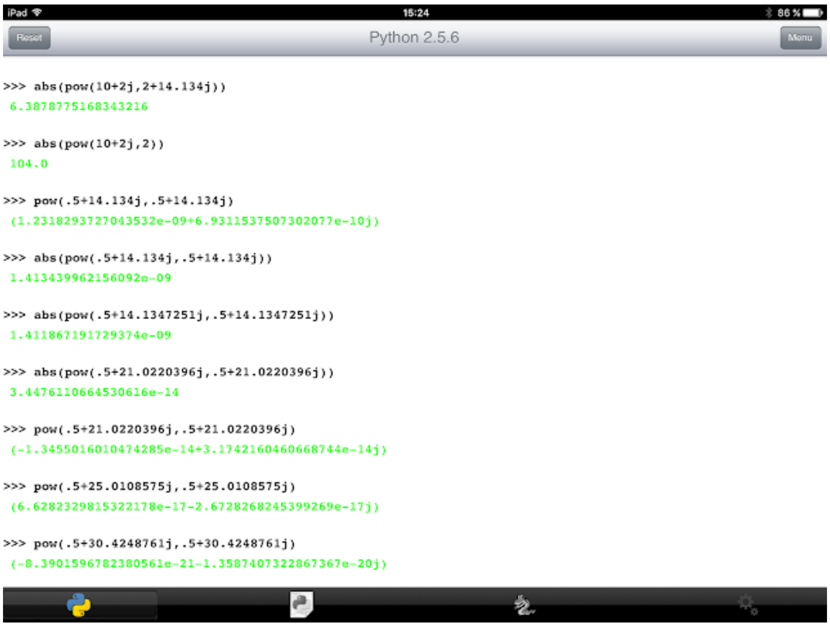


This image shows a plot of the Riemann zeta function along the critical line for real values of t running from 0 to 34. The first five zeros in the critical strip are clearly visible as the place where the spirals pass through the origin.

7) On travaille sur des nombres minis minis quand il s'agit de sommer des inverses de puissances d'entiers, forcément

Un zéro de zêta puissance lui-même, c'est vraiment mini-mini ** ! Et ça aussi, c'est minus !

**. Posté initialement sur Google+ le 27.7.2017, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/trucs-minuscules-vraiment.html



8) Indiscernabilité des zéros de zêta

La fonction qui rend les zéros de zêta indiscernables[††] au sens de Galois peut être décrite ainsi : quel que soit l'entier que l'on considère, lorsqu'on l'élève à la puissance d'un zéro de zêta, la norme du complexe obtenu est toujours égale à la racine de l'entier considéré.

Voyons un exemple pour fixer un peu les idées : prenons l'entier 13 dont la racine carrée vaut à peu près 3.605. Considérons les parties imaginaires des 5 premiers zéros de zêta qui valent à peu près $b1 = 14.134, b2 = 21.022, b3 = 25.010, b4 = 30.424$ et $b5 = 32.935$.

Elevons 13 aux puissances $0.5 + k_i * \sqrt{-1}$ à l'aide de python téléchargeable sur tablette en partance.
On obtient $pow(13, 0.5 + 14.134i) = 0.448 - 3.577i$
(noter au passage que python appelle i "j", pourquoi ? On le note i comme d'habitude car on n'est pas sur tablette en voyage.)
ou encore $pow(13, 0.5 + 21.022i) = -3.14 - 1.77i$
ou encore $pow(13, 0.5 + 25.01i) = 0.903 + 3.49i$
ou pour le quatrième zéro $pow(13, 0.5 + 30.424i) = -3.157 + 1.74i$
ou enfin $pow(13, 0.5 + 32.935i) = -3.391 + 1.224i$.

On vérifie alors que $\sqrt{0.448^2 + 3.577^2} = 3.605 = \sqrt{13}$ et de même pour le second zéro que $\sqrt{3.14^{+}1.77^2} = \sqrt{13}$.

Au sujet de l'indiscernabilité des zéros de zêta d'hier, ça ne va pas : quel que soit le complexe a+bi, quand on élève un entier à la puissance de ce complexe, seul a et l'entier considéré interviennent dans le calcul de la norme. Ce n'est pas le cas lorsqu'on élève un complexe à une puissance complexe.

$$|x^{a+bi}| = |x^a|$$

pour x entier mais pas pour x complexe.

††. Posté initialement sur Google+ le 26.7.2017 et le 27.7.2017, sauvegardé sur Blogger ici https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/trucs-minuscules-vraiment.html