Théorème de réarrangement de Riemann

Leçons : 202 [1], 230, *223*

[X-ENS An1], exercice 3.48

Théorème

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

Démonstration :

Étape 1 : Partitionnons $\mathbb{N}$ en deux ensembles infinis ; on note $E^+ = \{n \in \mathbb{N} | a_n \geqslant 0\}$ et $E^- = \{n \in \mathbb{N} | a_n < 0\}$.
On a donc : $\mathbb{N} = E^+ \sqcup E^-$.
Supposons par l'absurde $\#E^- < \infty$.
Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang ; ainsi la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ équivaut à sa convergence absolue.
Et ceci contredit alors la semi-convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.
Ainsi $\#E^- = \infty$ et, similairement, $\#E^+ = \infty$.

Étape 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\max\{0, a_n\} = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ et $\min\{0, a_n\} = \frac{a_n - |a_n|}{2}$.
En conséquence, $\sum_{n\geqslant 0} \max\{0, a_n\}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \min\{0, a_n\}$ divergent.

Étape 3 : On va construire $\sigma(n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
On pose $\sigma(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux cas se présentent :

- Si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} \leqslant \alpha$, alors on va ajouter un terme positif, et $\sigma(n) = \min E^+ \backslash (E^+ \cap \{\sigma(k) | k \in [\![0, n-1]\!]\})$.
- Si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$, alors on va ajouter un terme négatif, et $\sigma(n) = \min E^- \backslash (E^- \cap \{\sigma(k) | k \in [\![0, n-1]\!]\})$.

Étape 4 : La construction de σ implique son injectivité ; montrons sa surjectivité.
Par l'absurde, soit $N \in \mathbb{N}$, avec $N \notin \sigma(\mathbb{N})$; imaginons que $N \in E^+$.
Alors $E^+ \cap \sigma(\mathbb{N})$ est fini donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \sigma(n) \in E^-$.
En conséquence, dès que $n \geqslant n_0$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$.
Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{\sigma(n)}$ est à termes négatifs à partir d'un certain rang et que ses sommes partielles sont minorées, elle converge.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to E^-$ une application bijective strictement croissante [2] ; les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_{\sigma(n)}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{\varphi(n)}$ diffèrent d'un nombre fini de termes donc sont de même nature.
Mais les sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 0} a_{\varphi(n)}$ sont majorées par celles de $\sum_{n\geqslant 0} \min\{0, a_n\}$ qui divergent vers $-\infty$.
La série $\sum_{n\geqslant 0} a_{\varphi(n)}$ est donc divergente : contradiction.
On opérerait similairement si on avait $N \in E^-$; on a ainsi montré que σ est bijective.

Étape 5 : Il reste à montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_{\sigma(n)}$ converge et que sa somme vaut α.
Soit $\varepsilon > 0$; comme $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, on a : $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |a_n| < \varepsilon$.

1. Dans la 202, on énoncera la conclusion du théorème comme suit "l'ensemble $\left\{\sum n = 0^N a_{\sigma(n)} \middle| N \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$".
2. Pour la construire, il suffit de poser $\varphi(0) = \min E^-$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \min\left(E^- \backslash \{\varphi(k) | k \in [\![0, n-1]\!]\}\right)$.

Par injectivité, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} | \sigma(n) \leqslant n_1\}$ est fini ; on pose $n_0 = \max\{k \in \mathbb{N} | \sigma(k) \leqslant n_1\}$.
Si $n > n_0$, alors $\sigma(n) > n_1$ donc $\left|a_{\sigma(n)}\right| < \varepsilon$.
On sait que $\exists N \geqslant n_0, \sigma(N) \in E^+$ et $\sigma(N+1) \in E^-$, car les $\sigma(n)$ ne peuvent pas rester dans E^+ ou dans E^-.
On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$; on va montrer que $\forall n \geqslant N, |S_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
Comme $\sigma(N) \in E^+$, on a : $S_{N-1} \leqslant \alpha$; et comme $\sigma(N+1) \in E^-$, aussi $S_N > \alpha$.
Or $|S_N - S_{N-1}| = \left|a_{\sigma(N)}\right| < \varepsilon$ donc $\alpha + \varepsilon \geqslant S_{N-1} + \varepsilon \geqslant S_N > \alpha$.
Soit $n > N$, imaginons que $S_n > \alpha + \varepsilon$.
Comme on passe de S_{n-1} à S_n par un saut de longueur $\left|a_{\sigma(n)}\right| < \varepsilon$, on en déduit que $S_{n-1} > \alpha$.
Cela entraîne que $a_{\sigma(n)} < 0$ et donc $S_{n-1} \leqslant S_n$.
Mais alors de proche en proche : $\alpha + \varepsilon < S_n \leqslant S_{n-1} \leqslant S_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant S_N$. D'où une contradiction.
Ainsi, $\forall n > N, S_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.
Similairement, on montre que $\forall n > N, S_n \geqslant \alpha - \varepsilon$. Ainsi, $\forall n > N, |S_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
On a donc construit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n \geqslant 0} a_{\sigma(n)}$ converge et soit de somme α. ■

Références

[X-ENS An1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 1*, 3e éd., Cassini, 2014.