Où l’on achoppe, parce qu’on confond la variable et ce qu’elle désigne, ce qu’elle compte, et ceux qu’elle compte, peut-être, Denise Vella-Chemla, juillet 2025

Admettons qu’un nombre pair n ne vérifie pas la conjecture de Goldbach.

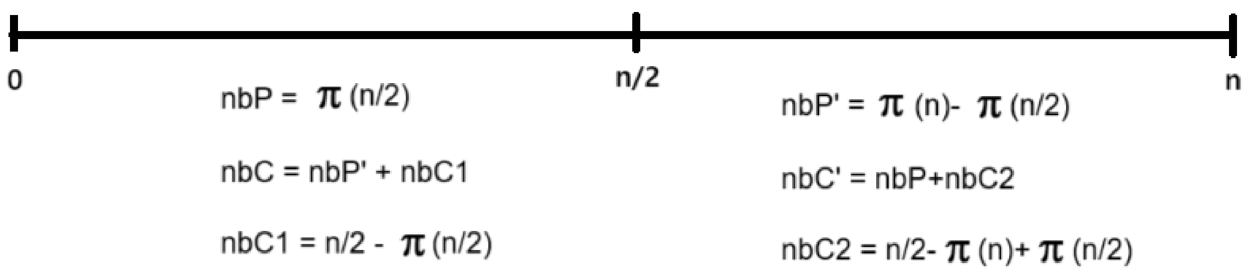
Comme un nombre pair, quel qu’il soit, est somme d’un nombre inférieur ou égal à sa moitié et d’un nombre supérieur ou égal à sa moitié, le nombre pair n, puisqu’il ne vérifie pas la conjecture de Goldbach, est donc tel que tout nombre premier $p \leq n/2$ a pour complémentaire à n un nombre $n-p$ qui est un nombre composé.

Il en est de même de tout nombre premier $p' \geq n/2$: son complémentaire à n qui est $n-p'$ doit être un nombre composé.

Désignons par nbP (resp. nbC) le nombre de nombres premiers (resp. composés) $\leq n/2$ et par nbP$'$ (resp. nbC$'$) le nombre de nombres premiers (resp. composés) $\geq n/2$.

Si tous les nombres complémentaires des nombres premiers $\leq n/2$ sont composés, nbC est décomposable en une somme de la forme $\mathrm{nbP}' + \mathrm{nbC}_1$.

Si tous les nombres complémentaires des nombres premiers $\geq n/2$ sont composés, nbC$'$ est décomposable en une somme de la forme $\mathrm{nbP} + \mathrm{nbC}_2$.



Mais les composés $\leq n/2$ ne peuvent être complémentaires que des composés $\geq n/2$, qui sont en nombre nbC_2 dont on ôte les complémentaires $\geq n/2$ des nombres premiers $\leq n/2$, qui sont en nombre nbP.

On écrit :

$$\mathrm{nbC}_1 = \mathrm{nbC}_2 - \mathrm{nbP} \tag{1}$$

Mais comme $\mathrm{nbC}' = \mathrm{nbP} + \mathrm{nbC}_2$, $\mathrm{nbP} = \mathrm{nbC}' - \mathrm{nbP}$, qu’on reporte dans (1) pour obtenir

$$\mathrm{nbC}_1 = \mathrm{nbC}' - 2\,\mathrm{nbP}.$$

De même, inversement, on aboutit à

$$\mathrm{nbC}_2 = \mathrm{nbC}_1 - \mathrm{nbP}' = \mathrm{nbC} - 2\,\mathrm{nbP}'.$$

D'autre part, dans les deux moitiés de l'intervalle, on a

$$\begin{aligned} n/2 &= \mathrm{nbC} + \pi(n/2) && = \mathrm{nbC'} + \pi(n) - \pi(n/2), \\ &= \mathrm{nbC}_2 + 2\,\mathrm{nbP'} + \pi(n/2) && = \mathrm{nbC}_1 + 2\,\mathrm{nbP} + \pi(n) - \pi(n/2), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\mathrm{nbC}_2 - \mathrm{nbC}_1 + 2\,\mathrm{nbP'} - 2\,\mathrm{nbP} = \pi(n) - 2\,\pi(n/2)$$

Mais puisque $\mathrm{nbC}_2 - \mathrm{nbC}_1 = \mathrm{nbP}$ et puisque $\mathrm{nbP} = \pi(n/2)$, on aboutit à

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{nbP'} - \mathrm{nbP} &= \pi(n) - 2\,\pi(n/2), \\ 2\,\mathrm{nbP'} &= \pi(n) - \pi(n/2), \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec la définition de $\mathrm{nbP'}$, qui est que $\mathrm{nbP'} = \pi(n) - \pi(n/2)$.