Décomposants de Goldbach et preuve par 9 (Denise Vella-Chemla, 8.5.2023)

En se remémorant de vieux souvenirs d'enfance, on cherche par programme si les nombres pairs, à partir de 56, ont toujours un décomposant de Goldbach qui vérifierait, ainsi que son complémentaire à n, un nombre pair considéré, certaines propriétés quant à la somme de ses chiffres.

On peut se reporter à cette transcription en LaTeX d'un extrait d'encyclopédie datant de 1856 pour se rappeler ce qu'est la preuve par 9 http://denise.vella.chemla.free.fr/transc-Montferrier-preuve-par-9.pdf.

On note $sc_9(x)$ la somme des chiffres de x. Le fait qui nous intéresse ici est que $sc_9(x + y) = sc_9(x) + sc_9(y)$.

La preuve par 9 "écrase" les nombres : deux nombres qui ont les mêmes chiffres[1] mais pas dans le même ordre, ont la même somme des chiffres. De même d'un nombre et d'un autre dans lequel on intercalerait des 9 par ci par là entre ses chiffres (comme 1234 et 1992394), etc.

Par programme jusqu'à 10^6, on trouve pour tous les :

- $18x + 2$ (exemples : 56, 74) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 1, i.e. deux nombres de la forme $18k + 1$ (exemples : 19, 37) ; on a notamment la décomposition $56 = 19 + 37$;

- $18x + 4$ (exemples : 58, 76) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 2, i.e. deux nombres de la forme $18k + 11$ (exemples : 11, 29) ; on a notamment la décomposition $58 = 11 + 47$) ;

- $18x + 8$ (exemples : 62, 80) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 4, i.e. deux nombres de la forme $18k + 13$ (exemples : 13, 31) ; on a notamment la décomposition $80 = 13 + 67$) ;

- $18x + 10$ (exemples : 64, 82) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 5, i.e. deux nombres de la forme $18k + 5$ (exemples : 5, 23) ; on a notamment la décomposition $64 = 5 + 59$) ;

- $18x + 14$ (exemples : 68, 86) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 7, i.e. deux nombres de la forme $18k + 7$ (exemples : 7, 43) ; on a notamment la décomposition $68 = 7 + 61$) ;

- $18x + 16$ (exemples : 70, 88) un décomposant de Goldbach et son complémentaire, tous les deux de somme des chiffres 8, i.e. deux nombres de la forme $18k + 17$ (exemples : 17, 53) ; on a notamment la décomposition $70 = 17 + 53$) ;

Il faut avoir à l'esprit qu'après tout, c'est assez ridicule de s'intéresser aux décompositions faisant intervenir deux nombres de même somme de chiffres, cette coïncidence de la somme ayant lieu parce qu'on utilise un système décimal de numération et parce que dans ce système, on fait des paquets

[1] Les chiffres sont aux nombres ce que les lettres sont aux mots.

de 10, 10 se trouvant être congru à l'unité modulo 9, mais dans un autre système de numération, il en serait autrement.

Les résultats du programme jusqu'à 10^6 (15 méga) sont à trouver ici :
http://denise.vella.chemla.free.fr/sommechif1M.txt[2].

Il semblerait qu'on ne trouve jamais de décompositions de Goldbach (à partir de 56) vérifiant les contraintes qu'on souhaite pour les nombres pairs multiples de 3. Pour eux on cherchera, peut-être, les décompositions de la forme $n = p + q$ avec $sc_9(p) = 1$ ou $sc_9(q) = 1$.

On a ainsi une espèce de périodicité qui fait retrouver la même sorte de décomposants de Goldbach tous les 9 nombres pairs. Cette périodicité permet de chercher les décomposants de Goldbach dans des progressions arithmétiques et il faudrait vraisemblablement utiliser les résultats au sujet du plus petit nombre premier appartenant à une progression arithmétique. On note pour mémoire les résultats démontrés fournis par la littérature dans la section suivante.

Plus petit nombre premier dans une progression arithmétique

(*On traduit un extrait d'un article de Heath-Brown ici*) : Le théorème classique de Dirichlet énonce que toute progression arithmétique $a \pmod q$ avec $(a, q) = 1$ ((a, q) est la notation habituelle pour le plus grand commun diviseur de a et q, on dit également, si $(a, q) = 1$ que a et q sont premiers entre eux) contient une infinité de nombres premiers (*Pour les progressions qui nous intéressent (dans lesquelles on cherche les décomposants de Goldbach), on a* $\varphi(18) = 6$ *et les nombres 1, 5, 7, 11, 13 et 17 dans les progressions* $18k + 1, 18k + 5, 18k + 7, 18k + 11, 18k + 13, 18k + 17$ *sont premiers à 18, bien sûr (sinon, elles ne permettraient pas de trouver des nombres premiers).*)

Il est alors naturel de se demander quel est le premier (i.e. le plus petit) d'entre eux, notons le $P(a, q)$?

En ce qui concerne les majorations, le résultat le plus important est celui de Yu. V. Linnik[3] qui a démontré que

$$P(a, q) \ll q^L \quad \text{pour une certaine constante absolue } L$$

R. Heath-Brown[4] démontre (théorème 6, p. 5) qu'on peut prendre $L = 5.5$.

[2]jusqu'à 10 millions, le fichier de 150 méga est là :
http://denise.vella.chemla.free.fr/sommechif10M.txt.

[3]Yu. V. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression I. The basic theorem*, Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S., 15 (57), 1944, 139-178, et Yu. V. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression II. The Deuring-Heilbronn phenomenon*, Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S., 15 (57), 1944, 347-368

[4]Roger Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, 1992, Proc. London Math. Soc., vol. 64, n° 3, p. 265-338.