Questions de fin d'été (Denise Vella-Chemla, 30.8.2016)

1) Premier problème :

J'ai lu que Dedekind a constaté que le déterminant d'un groupe cyclique $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ pouvait se calculer de 2 manières :

a) Par le calcul habituel,

$$\begin{aligned} & x(x^2-yz)-z(xy-z^2)+y(y^2-xz) \\ = \; & x^3-xyz-xyz+z^3+y^3-xyz \\ = \; & x^3+y^3+z^3-3xyz. \end{aligned}$$

b) ou bien en posant $\omega = \frac{2i\pi}{3}$ (et donc en ayant $\omega = \omega^4$, $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = -1$ et $\omega^2 + \omega^4 = -1$) et en calculant :

$$\begin{aligned} & (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z) \\ = \; & (x+y+z)(x^2+\omega^2 xy+\omega xz+\omega xy+\omega^3 y^2+\omega^2 yz+\omega^2 xz+\omega^4 yz+\omega^3 z^2) \\ = \; & (x^3+\omega^2 x^2 y+\omega x^2 z+\omega x^2 y+\omega^3 xy^2+\omega^2 xyz+\omega^2 x^2 z+\omega^4 xyz+\omega^3 xz^2+x^2 y+\omega^2 xy^2+\omega xyz \\ & +\omega xy^2+\omega^3 y^3+\omega^2 y^2 z+\omega^2 xyz+\omega^4 y^2 z+\omega^3 yz^2+x^2 z+\omega^2 xyz+\omega xz^2+\omega xyz+\omega^3 y^2 z \\ & +\omega^2 yz^2+\omega^2 xz^2+\omega^4 yz^2+\omega^3 z^3) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(\omega^2+\omega^4+\omega+\omega^2+\omega^2+\omega) \\ & +x^2 y(\omega^2+\omega+1)+x^2 z(\omega+\omega^2+1)+xy^2(\omega^3+\omega^2+\omega) \\ & +xz^2(\omega^3+\omega+\omega^2)+y^2 z(\omega^2+\omega^4+\omega^3)+yz^2(\omega^3+\omega^2+\omega^4) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(\omega(2+3\omega+\omega^3)) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(\omega(2+3e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{2i\pi})) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(\omega(3+3e^{\frac{2i\pi}{3}})) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(3\omega(1+e^{\frac{2i\pi}{3}})) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(3e^{\frac{2i\pi}{3}}+3e^{-\frac{2i\pi}{3}}) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(3(2\,cos\frac{2i\pi}{3}) \\ = \; & x^3+y^3+z^3+xyz(3(2(-\tfrac{1}{2}))) \\ = \; & x^3+y^3+z^3-3xyz. \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $e^{ix}+e^{-ix} = 2cosx$).

J'aimerais savoir si ça marche aussi (s'il y a à nouveau égalité) en calculant le déterminant d'un groupe cyclique 4, 5, etc., c'est à dire si à chaque fois, on tombe sur une expression bien symétrique (bien posée sur ses n jambes) de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n - n\prod_{i=1}^{n} x_i$$

et si oui, qu'est-ce qu'il faut mettre comme premier produit à calculer par la deuxième méthode, est-ce qu'il faut mettre toutes les combinaisons racine/variable) (et pourtant, ce n'est pas ce qui a été fait pour le degré 3 puisqu'on n'a pas mis d'ω, à quelque puissance que ce soit, devant x dans le deuxième calcul ci-dessus) ?

2) Second problème :

Euler p.249 de l'article *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* développe un produit puis effectue un certain nombre de calculs (entre autres des dérivations) pour trouver une formule récurrente de la somme des diviseurs. Le produit qu'il développe est :

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots$$

Que se passerait-il si des traitements similaires étaient effectués sur les produits suivants ?

$$(1-2x)(1-4x^2)(1-9x^3)(1-16x^4)\dots$$

ou bien

$$(1-ix)(1-ix^2)(1-ix^3)(1-ix^4)\dots$$

ou bien

$$(1-x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)\dots$$