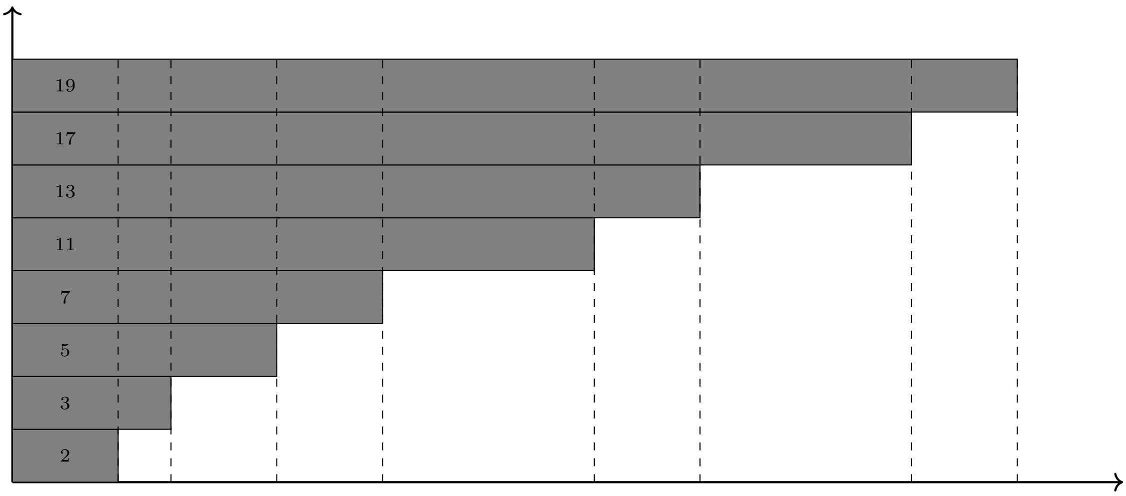
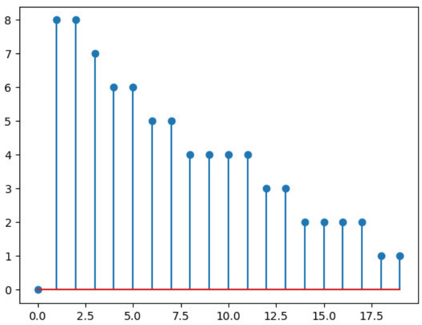
Quantifier les nombres premiers (Denise Vella-Chemla, 28.8.2018)

On a découvert récemment une façon de quantifier les décomposants de Goldbach (i.e. ou décompositions d'un nombre pair en somme de deux nombres premiers), c'est-à-dire de compter certains de leur nombre en les coupant en morceaux.
On souhaite étudier ici de la même manière les nombres premiers eux-mêmes.

Empilons-les tous les uns sur les autres ainsi :

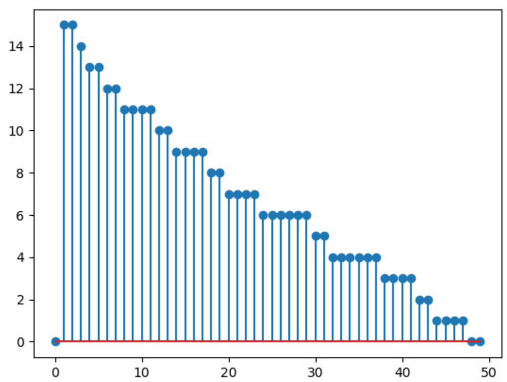


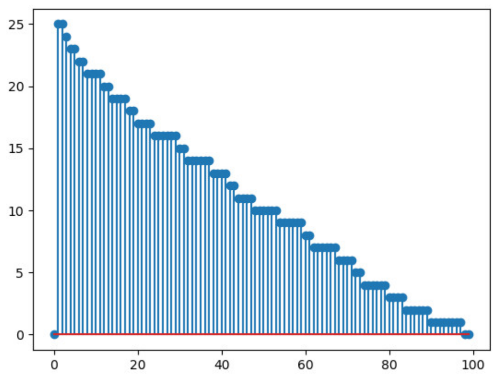
Faisons descendre les quanta le plus bas possible (par une sorte de gravité !) et comptons, on obtient par programme le graphique suivant :

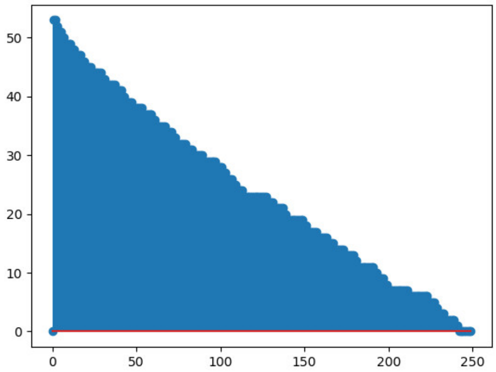


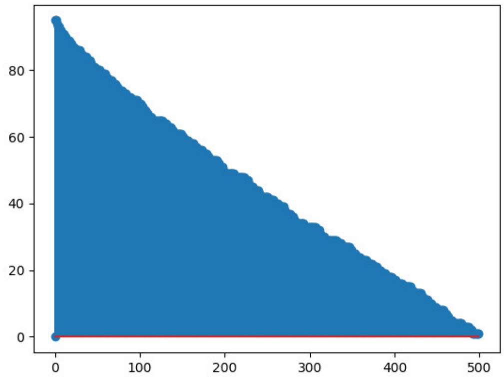
C'est le graphique d'une fonction, $f_{20}(x)$ qui fournit pour tout $x \leq 20$ le nombre de nombres premiers qui sont compris entre x et 20. L'abscisse à l'origine est ainsi égale à $\pi(20)$ (avec $\pi(x)$ la notation habituelle pour le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x).

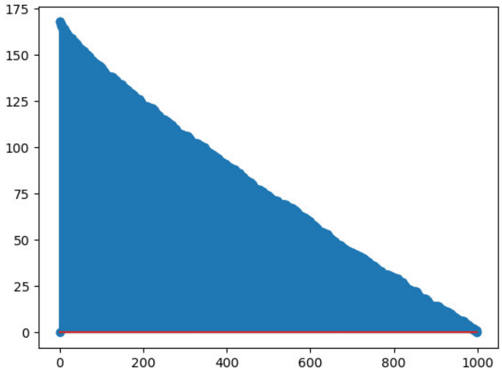
On fournit ci-dessous les courbes correspondant à des comptages similaires jusqu'à 50, 100, 250, 500, 1000 et 10000.

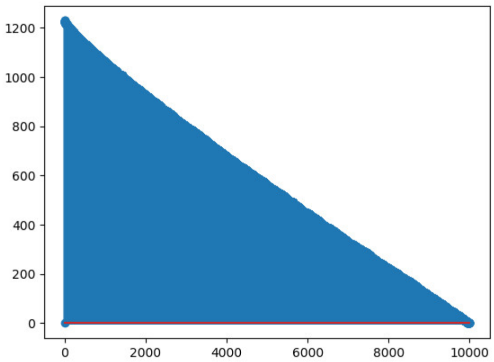












Comme attendu, ont été obtenus les graphiques de fonctions $f_n(x)$ presque linéaires décroissantes, d'équations qui semblent être de la forme $f(x) = -\dfrac{\pi(n)}{n}x + \pi(n)$ avec n l'abscisse la plus grande, alors qu'elles sont en réalité de la forme $f(x) = \pi(n) - \pi(x)$.

On peut étirer $\pi(x)$ de la façon suivante : pour que les valeurs des images couvrent la totalité de l'intervalle $[0, 20]$ par exemple, lorsqu'on rencontre un nombre premier, on cumule des sauts verticaux de 1 de manière à ce que les marches d'escalier plutôt que d'être de hauteur 1 (comme dans la fonction $\pi(x)$) soient plutôt de hauteur $p_k - p_{k-1}$, cela permet de rester toujours proche de la diagonale, qui est de longueur $\sqrt{2}n$.

La fonction correspondante consiste à associer à x le plus grand nombre premier inférieur ou égal à x. Les nombres premiers se retrouvent ainsi sur la diagonale du graphique.

On illustre cette idée sur le diagramme de la fonction $\pi(x)$ étirée pour x inférieur ou égal à 19 (à droite) en regard de $\pi(x)$ (à gauche).