

On doit reprendre ici une idée de modélisation qu'on a eue pour la conjecture de Goldbach et utilisant des matrices stochastiques, en essayant d'être un peu plus précise quant aux probabilités des différentes transitions possibles entre les décompositions des nombres entiers pairs comme sommes de deux impairs qui partagent certains composants (en l'occurrence, le premier ou le second sommant des décompositions).

On revient sur les règles de combinaisons de lettres qu'on avait mis au jour en février 2014 pour les étudier en termes probabilistes.

On avait pris l'habitude de coder ces transitions dans le domaine de la théorie des langages, par des mots associés à n ou $n + 2$ avec des lettres a, b, c, d mais ces lettres n'étaient pas très parlantes, ce qui gênait la compréhension des processus à l'œuvre ; on va plutôt utiliser ici les lettres p pour premier et c pour composé.

On a 16 règles possibles qui lient les décompositions de n et $n + 2$ en sommes de deux impairs, la première décomposition étant de la forme $n = x + y$, la seconde dénotant $n = (x + 2) + (y - 2)$ et la troisième étant la décomposition de $n + 2$ suivante : $n + 2 = (x + 2) + y$.

On identifie ces 16 règles selon le caractère premier (p) ou composé (c) des quatre nombres $x, y, x + 2$ et $y - 2$. Il y a 16 règles parce qu'on considère l'état *premier* ou *composé* des 4 variables qui "passent" de 2 décompositions de n à 1 décomposition de $n + 2$ et que ces 4 variables peuvent prendre 2 états chacune.

On note ces 16 règles par des transitions d'états :

$$\text{état}_x, \text{état}_y, \text{état}_{x+2}, \text{état}_{y-2} \longrightarrow \text{état}_{x+2}, \text{état}_y.$$

$r_1)$ $p, p, p, p \longrightarrow p, p$	$r_5)$ $c, p, p, p \longrightarrow p, p$	$r_9)$ $p, c, p, p \longrightarrow p, c$	$r_{13})$ $c, c, p, p \longrightarrow p, c$
$r_2)$ $p, p, c, p \longrightarrow c, p$	$r_6)$ $c, p, c, p \longrightarrow c, p$	$r_{10})$ $p, c, c, p \longrightarrow c, c$	$r_{14})$ $c, c, c, p \longrightarrow c, c$
$r_3)$ $p, p, p, c \longrightarrow p, p$	$r_7)$ $c, p, p, c \longrightarrow p, p$	$r_{11})$ $p, c, p, c \longrightarrow p, c$	$r_{15})$ $c, c, p, c \longrightarrow p, c$
$r_4)$ $p, p, c, c \longrightarrow c, p$	$r_8)$ $c, p, c, c \longrightarrow c, p$	$r_{12})$ $p, c, c, c \longrightarrow c, c$	$r_{16})$ $c, c, c, c \longrightarrow c, c$

Prenons un exemple pour fixer les idées : l'application de la règle r_{10} , appliquée aux nombres 13, 25, 15, 23, qui décomposent $n = 38$ qui sont bien (dans l'ordre) p, c, c, p (premier, composé, composé, premier) permet d'obtenir la décomposition c, c de $n + 2 = 40 = 15 + 25$.

Les transitions qui lient deux décompositions de n à une décomposition de $n + 2$ s'effectuent bien sûr d'une manière complètement déterministe : lorsqu'on imagine le passage de la décomposition $98 = 19 + 79$ à la décomposition $100 = 21 + 79$ comme étiquetable par la transition $G \rightarrow \neg G$ qui signifie que la décomposition de 98 en $19 + 79$ est une décomposition de Goldbach (notée G , elle additionne deux nombres premiers) tandis que la décomposition de 100 en $21 + 79$ n'est pas une décomposition de Goldbach (notée $\neg G$ car 21 est composé), cette transition s'effectue avec la probabilité 1, elle est effective, on dirait "instanciée" en termes informatiques, comme peut être instanciée une variable.

Mais lorsqu'on imagine l'espace infini de toutes les additions de nombres entiers impairs, et qu'on ne sait pas de quoi sont composées ces additions, si elles contiennent 0, 1, 2, 3 ou 4 nombres premiers, on peut associer aux transitions entre additions des probabilités de passage, qui font penser aux transitions entre états du domaine de la physique, et qui peuvent être visualisées selon le petit automate ci-dessous, codable par la matrice :

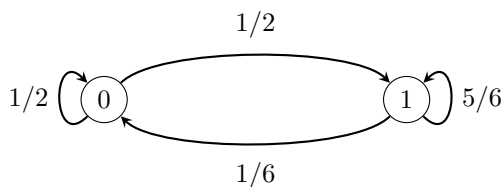
$$M = \begin{matrix} & G & \neg G \\ \begin{matrix} G \\ \neg G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On fixe ces valeurs pour les probabilités car en comptant le nombre de règles parmi les 4 qui présentent 2 lettres p en 3^{ème} et 4^{ème} variables de la partie gauche de la règle (les règles r_1, r_5, r_9, r_{13}), 2 permettent d'obtenir également deux lettres p en partie droite de la règle (les règles r_1, r_5) et 2 règles ne le permettent pas (les règles r_9, r_{13}) : ceci explique les deux valeurs $1/2$ de la première ligne de la matrice de transition.

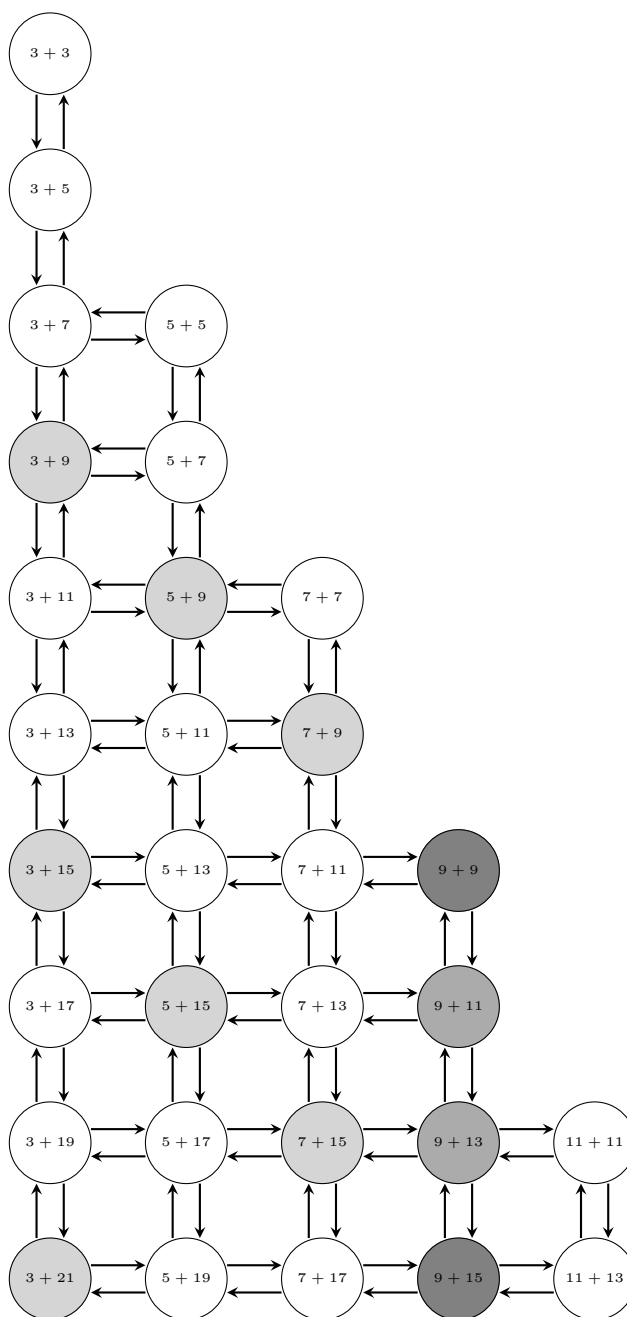
Les valeurs $1/6$ et $5/6$ de la seconde ligne se justifient par le fait que 10 règles parmi les 12 règles restantes (règles des seconde, troisième et quatrième lignes), qui présentent au moins une lettre c en 3^{ème} ou 4^{ème}

variables de la partie gauche de la règle, 2 seulement permettent d'obtenir deux lettres p en partie droite de la règle (les règles r_3, r_7) et 10 règles ne le permettent pas : ceci explique les deux valeurs $2/12 = 1/6$ et $10/12 = 5/6$ de la seconde ligne de la matrice de transition.

Mais comme on ne sait pas quel est précisément le "ratio" de nombres premiers que contient un état, on doit simplement voir toutes les transitions entre états comme respectant toutes ce petit graphe simple à deux états.



Pour ne pas surcharger la représentation du graphe d'états ci-dessous, on ne note ni les transitions d'un état vers lui-même, ni les probabilités associées aux transitions. Il faut aussi imaginer toutes les flèches entrantes et sortantes vers d'autres états que l'on ne considère pas lorsqu'on cherche les décompositions de Goldbach d'un nombre.



Le problème maintenant est qu'en élevant la petite matrice M à une certaine puissance pour essayer de comprendre ce qui a lieu ligne par ligne (et être assuré qu'il y a toujours une décomposition au moins de couleur blanche (ou G par ligne ou décomposition de chaque pair en une somme de deux nombres premiers), on obtient une tendance générale vers la matrice suivante :

$$M^{1000} = \begin{matrix} & G & \neg G \\ \begin{matrix} G \\ \neg G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ce qui semble indiquer que chaque état a une chance sur 2 d'être une décomposition de Goldbach (en additionnant les deux quarts de la colonne G) mais on ne sait pas combiner les différents états et $1/2$ n'est pas 1.

On trouve cependant dans cette page

<http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgymm/Probabil/ProbCalc.htmdeuxde>

l'énoncé d'un problème posé par le Chevalier de Méré au milieu du XVII^{ème} dont l'énoncé est : *“qu'est-ce qui est le plus probable, obtenir un 6 en 4 jets d'un dé ou obtenir un double-6 en 24 jets de deux dés (chacune de ces probabilités globales étant proche de 50%) ?”*.

La page explique que Pascal fonde le calcul des probabilités en fournissant comme réponse à ce problème qu'augmenter le nombre de lancers diminue la probabilité globale :

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.49 \dots \text{ est inférieur à } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.51 \dots$$

Concernant la conjecture de Goldbach, le fait que les lignes contiennent de plus en plus de nombres, potentiellement premiers, ne semble pas augmenter la probabilité d'obtenir une décomposition d'un nombre pair n en somme de deux nombres premiers pour n de plus en plus grand.