Un héritage mathématique fertile
Jean Malgoire

Janvier 1985, une vague de froid exceptionnelle s'est abattue sur toute l'Europe. Dans sa très modeste masure perdue au milieu des vignes, Alexandre Grothendieck est plongé depuis des mois dans la rédaction de Récoltes et semailles. Le 7 janvier, les rigueurs de l'hiver s'invitent dans son récit et celui-ci nous parle du vent glacé qui descend du mont Ventoux, du potager gelé, des souches de vigne qu'il coupe à la hache chaque jour pour alimenter le poêle auprès duquel il tape sur sa vieille machine à écrire. Mais rien n'entame son ardeur et ce qui devait être une introduction à un texte purement mathématique deviendra un ouvrage autonome de plus de 1500 pages...

Dans le premier fascicule sous-titré "Promenade à travers une œuvre - ou l'enfant et la mère", il parle avec passion des grands thèmes mathématiques qu'il a développés au cours de sa carrière et de la spécificité de sa démarche ; et cela dans un langage "non technique" accessible à des lecteurs non mathématiciens auxquels il s'adresse individuellement : *"[...]aussi si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues".* Peut-on rêver meilleur guide ?

Au fil de sa promenade, Grothendieck cite une liste des douze idées maîtresses de son œuvre mathématique. Parmi ces thèmes, explique-t-il, certains sont à l'état embryonnaire, d'autres sont encore dans leur enfance, mais la moitié ont atteint une telle maturité que *"parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de jour et à tout moment".* La notion de topos est l'un de ces thèmes, et pas n'importe lequel. Pour Grothendieck, il s'agit de l'idée majeure de son œuvre, la plus vaste par sa portée :

Le thème du topos est ce "lit", ou cette

> *"rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes" Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.*

C'est aussi une porte d'entrée vertigineuse dans la pensée mathématique de Grothendieck.

En 1958, le mathématicien, devenu célèbre après avoir démontré une généralisation du théorème de Riemann-Roch [1], pose les bases d'une géométrie nouvelle en introduisant la notion de schéma. A l'époque la géométrie algébrique est divisée en plusieurs domaines aux interactions limitées : des domaines où les objets sont perçus comme continus (géométrie analytique, géométrie algébrique classique sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et d'autres où ils sont discontinus (géométrie arithmétique sur les corps finis, par exemple).

Les schémas fournissent une autre façon, généralisée, de voir les objets de la géométrie algébrique, c'est-à-dire les variétés algébriques - par exemple des surfaces définies par une équation polynomiale

note : Jean Malgoire, ancien élève de Grothendieck, est maître de conférences à l'Université de Montpellier.

1. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation d'une sphère) ; cette vision permet d'englober même les structures discontinues - discrètes - de la géométrie arithmétique [2].

Pour Grothendieck, les schémas constituent ainsi "le cœur" de la nouvelle géométrie, l'outil qui unifie les géométries algébrique et arithmétique. Mais ce sont les topos, notion introduite en 1963 [3], qui forment "la demeure" de la nouvelle géométrie. Les topos sont une métamorphose de la notion d'espace. Ils permettent d'appliquer une vision topologique subtile aux objets de la géométrie algébrique (les variétés ou leur généralisation, les schémas). Les schémas et les topos créent en quelque sorte un pont entre le discret et le continu.

Dans l'histoire du concept mathématique d'espace, les topos constituent un dépaysement soudain, explique Grothendieck :

> *"Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement "continue"* [4]*.*
> *La notion d'"espace" est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension "géométrique" du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires* [5]*.*
> *Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le "philosophe de la nature" concevait "l'espace". Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle - ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain* [6]*."*

Et pourtant, les précédentes évolutions de la notion d'espace offraient déjà des changements conceptuels considérables.

Les métamorphoses de la notion d'espace

D'abord au XVIIe siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées cartésiennes, les figures géométriques se sont métamorphosées en équations : le cercle réapparaît sous la forme "$x^2 + y^2 = 1$". La représentation de l'espace au moyen des nombres est une transformation que l'on peut qualifier de radicale (et qui continue de dérouter les étudiants...).

Puis au XIXe siècle, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduit la notion de variété abstraite, un espace qui peut être décrit localement par une, deux, trois ou même n coordonnées (espace à n dimensions). Avec Riemann, les variétés se dégagent des espaces ambiants dans lesquels elles sont plongées et prennent leur autonomie : il n'y a plus *a priori* d'extérieur naturel à une variété. Cela a permis par exemple à Einstein de concevoir l'Univers comme une variété qui ne soit pas *a priori* un espace euclidien (dont les lois sont celles de la géométrie traditionnelle d'Euclide). Le progrès est réel, mais la disparition du décor demande un certain effort d'abstraction.

---

2. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.
3. Il est aussi question de l'année 1958 dans le passage : *"C'est ce dernier travail surtout qui absorbait le plus gros de mon énergie - un patient et vaste travail de fondements que j'étais le seul à voir clairement et, surtout, à "sentir par les tripes". C'est lui qui a pris, et de loin, la plus grosse part de mon temps, entre 1958 (l'année où sont apparus, coup sur coup, le thème schématique et celui des topos) et 1970 (l'année de mon départ de la scène mathématique)".*
4. début de l'*Épilogue Les cercles invisibles.*
5. Dans *La topologie ou l'arpentage des brumes.*
6. *idem*

Au début du XX^{e} siècle, les mathématiciens s'aperçoivent que dans les espaces métriques (c'est-à-dire munis d'une notion de distance entre les points), beaucoup de propriétés fondamentales (telle la connexité, qui est la propriété d'un espace d'être "d'un seul tenant", ou la "compacité") ne dépendent pas de la métrique qu'ils portent, mais seulement des parties dites ouvertes de ces espaces. Une partie est dite ouverte si, dès qu'elle contient un point, elle contient une boule centrée en ce point. Par exemple, les ouverts de la droite réelle sont les réunions (quelconques) d'intervalles ouverts, et les ouverts du plan les réunions de disques ouverts, c'est-à-dire privés de leurs bords. De plus, les ouverts ont des propriétés intéressantes qui leur confèrent une certaine stabilité : une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

En 1914, le mathématicien allemand Felix Hausdorff s'appuie sur ces propriétés de stabilité pour définir la notion d'espace topologique : un espace topologique est un ensemble E muni d'un ensemble de parties de E appelées ouverts (ou parties ouvertes de E) vérifiant les deux propriétés suivantes :

- l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ouverts,
- et une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore ouverte.

On dit que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E. Des concepts antérieurs (comme ceux de variété ou d'espace métrique), la définition d'espace par Hausdorff ne conserve qu'une idée très affaiblie de proximité à travers le concept d'ouvert.

La notion d'espace topologique permet d'appliquer notre intuition "spatiale" à des situations sans métrique naturelle. Par exemple, en géométrie algébrique, grâce à Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe de la génération précédant celle de Grothendieck, on sait associer à tout anneau A (c'est-à-dire à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou les anneaux de polynômes) un espace topologique Spec A appelé spectre de A. L'espace Spec A n'a pas de métrique naturelle (c'est-à-dire de fonction définissant une distance entre les éléments de Spec A) qui donnerait les ouverts de Spec A. Pourtant, la topologie de Zariski qui définit Spec A en fait bien un espace topologique : pour $\mathbb{Z}$, par exemple, ce spectre est l'ensemble des nombres premiers auquel on adjoint 0, et ses ouverts sont la partie vide et les complémentaires des ensembles formés d'un nombre fini de nombres premiers. Pour un anneau quelconque, le spectre est l'ensemble des "idéaux premiers" (qui sont une généralisation des nombres premiers).

Avec le concept d'espace topologique, les mathématiciens ont vraiment l'impression d'avoir atteint un degré de généralité maximal, en quelque sorte indépassable. De fait, grâce à sa souplesse et à sa simplicité, le concept connaît un grand succès et continue d'être le cadre naturel de la topologie générale. Aussi, si les limitations de cette notion d'espace sont apparues assez naturellement à Grothendieck à la fin des années 1950, il a fallu faire un effort conceptuel considérable pour imaginer comment les dépasser.

Un manque cruel d'ouverts

Pour Grothendieck, les limitations se font particulièrement sentir dans le cadre de la topologie (l'ensemble d'ouverts) que Zariski a définie, par extension, pour les variétés algébriques, car si elle est suffisante pour beaucoup de propos, elle "manque cruellement d'ouverts" : par exemple sur une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, les seuls ouverts non vides pour la topologie de Zariski sont les complémentaires des parties finies de la courbe. Si l'on prend comme courbe la droite affine sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le spectre de l'anneau des polynômes à une variable et à coefficients dans $\mathbb{C}$), on trouve l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et ses ouverts pour la topologie de Zariski sont la partie vide et les complémentaires des parties finies de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le plan privé d'un nombre fini de points. Tous les ouverts (à part le vide) sont donc très gros : on ne peut pas avoir de "petits" voisinages d'un point. En revanche, pour la topologie ordinaire sur le plan complexe, les ouverts sont les réunions quelconques de disques ouverts ; il y a donc beaucoup plus d'ouverts ! Par exemple, autour de chaque point, on peut prendre pour voisinages du point des disques ouverts de rayons aussi petits que l'on souhaite. Ainsi, des espaces X au-dessus d'une variété complexe - c'est-à-dire munis d'une application continue de X vers la variété - peuvent être localement très simples pour la topologie ordinaire sans l'être pour la topologie de Zariski.

Pour pallier cette difficulté, Grothendieck élargit la notion de topologie sur une variété en étendant celle des ouverts à prendre en compte. Il ne se limite plus aux parties ouvertes de la variété, mais accepte aussi certains espaces au-dessus des ouverts, appelés revêtements étales d'ouverts *(voir Encart 1).*

Cette notion remonte en quelque sorte à Riemann et aux surfaces qu'il inventa au XIX^e^ siècle pour faciliter l'étude des fonctions multiformes, c'est-à-dire des fonctions mal définies parce qu'elles associent plusieurs valeurs à une même valeur de la variable. Puisque les fonctions donnaient plusieurs valeurs en un même point de l'espace de départ, Riemann a transformé l'espace de départ en feuillets superposés et recollés de telle façon que sur la nouvelle surface constituée - appelée depuis surface de Riemann -, la fonction n'associe plus qu'une seule valeur à chaque valeur de la variable.

D'après Luc Illusie, ancien élève de Grothendieck, l'idée de la localisation étale chez son maître remonte à avril 1958, à l'occasion d'un exposé de Jean-Pierre Serre au séminaire Chevalley, Jean-Pierre Serre avait remarqué qu'élargir la localisation d'un espace au-dessus d'une variété algébrique à des revêtements étales d'ouverts permettait de révéler certaines de ses propriétés. Enthousiaste, Grothendieck a repris l'idée pour élargir la topologie de Zariski. Il voyait même déjà comment cet élargissement aiderait à s'attaquer aux conjectures de Weil.

Depuis leur formulation, en 1949, par André Weil, un des membres fondateurs du groupes de mathématiciens Bourbaki (que Grothendieck a rejoint au début des années 50), ces conjectures font miroiter l'idée que des relations existent entre des informations de nature arithmétique et la topologie. Weil les a énoncées alors qu'il menait des calculs sur le nombre de solutions de certaines équations algébriques dans des ensembles finis de nombres. En substance, les conjectures de Weil relient le nombre de certaines solutions d'une équation algébrique à des propriétés topologique de la variété algébrique décrite par l'équation. Cette relation entre informations arithmétiques et topologie suggérait de construire une théorie plus subtile - une théorie cohomologique - qui permettait d'englober les propriétés arithmétiques et topologiques de la variété. Grothendieck construira une telle théorie quelques années plus tard (la cohomologie étale) et prouvera une partie dse conjectures ; la dernière sera démontrée en 1974 par son élève Pierre Deligne et lui vaudra une médaille Fields.

La genèse des topos

Cependant, en 1958, pris par le considérable travail de refondation de la géométrie algébrique qu'il a entrepris, Grothendieck ne développe pas tout de suite ses idées sur la localisation étale. Tout est dans sa tête, mais il n'y revient que quelques années plus tard, en 1963, avec le séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie n°4 (SGA4) à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, consacré... à sa nouvelle géométrie. Grothendieck donne alors un cadre mathématique formel à l'idée de localisation étale. Les deux principaux outils qu'il utilise pour cela sont le langage des catégories et la théorie des faisceaux.

La notion de catégorie a été introduite en 1945 par les américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Elle formalise la notion de classe d'objets, c'est-à-dire d'objets de même nature, et de relations entre ces objets. Une catégorie est d'abord un graphe orienté - des objets et des flèches entre ces objets, qu'on appelle morphismes. Mais on a en plus une composition des flèches généralisant la composition des applications entre ensembles.

Parmi les catégories les plus usitées, citons la catégorie des ensembles (les flèches sont alors les applications entre ensembles), ou celles des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, etc. De même, si E est un espace topologique muni d'un ensemble $Ouv(E)$ d'ouverts, alors $Ouv(E)$ est, de manière naturelle, une catégorie (avec pour tout couple d'ouverts U et V tels que V inclus dans U, un seul et unique morphisme de V vers U : l'application inclusion de V dans U).

La "philosophie" des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes : deux objets isomorphes dans une catégorie sont, du point de vue catégorique, "interchangeables". Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets. Ce résultat élémentaire, mais fondamental, porte le nom de lemme de Yoneda et peut se traduire par : "Dis-moi qui tu fréquentes et je te dirai qui tu es."

Bien évidemment, les mathématiciens s'intéressent aussi aux relations entre catégories. Celles-ci sont formalisées sous la forme de foncteurs, des analogues des applications entre ensembles qui permettent de transporter des objets et les relations entre eux d'un "cadre" (une catégorie) dans un autre (une autre catégorie).

L'autre outil clé que Grothendieck utilise est le concept de faisceau, introduit en 1946 par le mathématicien français Jean Leray. En substance, un faisceau sur un espace topologique est un foncteur qui a la propriété de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale *(voir encart 3).*

Grothendieck remarque que la notion centrale qui permet de définir ce qu'est un faisceau sur un espace topologique B est simplement la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts. Si l'on veut élargir la notion d'ouvert à des objets au-dessus de B (par exemple à des revêtements d'ouverts pour la localisation étale), en d'autres termes, si l'on veut formaliser la notion d'ouvert pour pouvoir considérer les revêtements étales d'ouverts comme des ouverts, il faut élargir la notion de recouvrement à d'autres objets que les ouverts ordinaires.

En remarquant aussi que les ouverts d'un espace forment une catégorie, Grothendieck fait le saut de remplacer la catégorie des ouverts d'un espace par une catégorie quelconque C, munie pour tout objet d'une notion de recouvrement : c'est la donnée pour tout objet x de C de familles d'objets de C au-dessus de x, appelées familles couvrantes (de x). Grothendieck nomme site cette notion de catégorie munie de familles couvrantes, et l'ensemble des familles couvrantes constitue une topologie dite depuis *topologie de Grothendieck*. La notion de faisceau sur un site C est alors absolument analogue à celle de faisceau sur un espace topologique : c'est un foncteur de la catégorie C dans celle des ensembles, qui vérifie la propriété de "passage du local au global" pour tout objet de C et toute famille couvrante de cet objet.

Grothendieck aurait pu s'arrêter là pour les besoins de la géométrie algébrique. Plusieurs sites ont été définis, dont le site dit étale qui a conduit à la cohomologie étale, grâce à laquelle les conjectures de Weil ont été démontrées. Le site étale et les faisceaux pour la topologie associée, la topologie étale, sont les objets qui ont cristallisé l'idée initiale de la localisation étale. Mais il voit toujours plus loin. Pour lui, l'objet le plus intéressant, intrinsèque, associé à un site est la catégorie de tous les faisceaux sur la catégorie du site. C'est cette catégorie des faisceaux qu'il nomme topos.

Plus généralement, pour Grothendieck, un topos est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Cette nouvelle notion d'espace a deux propriétés importantes, explique-t-il dans *Récoltes et semailles* :

> *Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates), les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales, des notions et de certaines au moins des techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.*
> *Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique", aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (et pour cause...).*

A chaque espace topologique X est associé un topos - la catégorie des faisceaux sur X. Cette correspondance est un foncteur. C'est ce foncteur, cette "traduction" que Grothendieck appelle "traversée du miroir" :

> *Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d"'espace" en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque-là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").*
>
> *Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles - celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.*

Cette catégorie est précisément la catégorie des ensembles car un faisceau sur un espace réduit à un point est un ensemble. Donc la catégorie des faisceaux sur un point est la catégorie des ensembles ! Ce qui a, sans doute, de quoi dépayser quelque peu : l'espace le plus réduit, le point, comme topos, est représenté par quelque chose d'aussi énorme que la catégorie des ensembles (que dans ce cadre on appelle plutôt topos ponctuel ou topos final). Ainsi les topos sont des catégories qui présentent "beaucoup de propriétés" de la catégorie des ensembles.

Pour Grothendieck, de l'autre côté du miroir entre les espaces ordinaires et les topos, du côté des topos, "le monde est plus beau". Pour m'en donner une illustration, Olivier Leroy, un ancien élève de Grothendieck, m'avait expliqué il y a bien longtemps : "Passer des espaces topologiques aux topos, c'est comme passer de la géométrie affine à la géométrie projective : cela fait disparaître les cas particuliers." *(voir encart 4)*.

Plus généralement, le langage des topos permet de donner une représentation spatiale pertinente à des situations qui, classiquement, n'étaient pas associées à une telle représentation (principalement en algèbre). Par exemple, la théorie de Galois, qui portait originellement sur la résolubilité des équations algébriques, devient, dans le cadre des topos, un exemple de situation galoisienne que l'on rencontre dans beaucoup de domaines, comme la classification des revêtements d'un espace topologique.

Le langage des topos est devenu un outil fondamental pour un grand pan de la géométrie algébrique actuelle, notamment la géométrie algébrique dérivée. Continuation de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, cette géométrie est développée par des mathématiciens comme Jacob Lurie et Bertrand Toen en France. Ces mathématiciens ont même dépassé les "simples" topos et utilisent des notions de topos d'ordres supérieurs (les ∞-topos, par exemple).

Certains essayent aussi de mieux comprendre les "espaces de modules", c'est-à-dire les espaces décrivant toutes les formes possibles d'objets d'un type géométrique donné, comme les courbes algébriques. Dans les années 1980, l'étude de l'espace algébrique de toutes les formes possibles de courbes, qui est en fait un topos et non un espace ordinaire, a été centrale dans le travail de Grothendieck.

Les applications de la théorie des topos vont aussi bien au-delà de la géométrie algébrique. Les physiciens théoriciens y voient un cadre naturel pour une logique quantique. Les logiciens, quant à eux, les utilisent pour construire des modèles de théories formelles : on peut voir chaque topos comme une sorte d'univers des ensembles avec sa propre logique. Comme application, on a pu construire un topos dans lequel l'hypothèse du continu n'est pas vérifiée. Formulée au XIXe siècle par le mathématicien Georg Cantor, cette hypothèse affirme que si un ensemble présente un nombre d'éléments d'une infinité d'ordre supérieur à celle de l'ensemble des nombres naturels, alors il a au moins autant d'éléments que l'ensemble des nombres réels. La démonstration de cette hypothèse est le premier des 23 problèmes que le mathématicien allemand David Hilbert avait proposés en 1900 pour guider la recherche en mathématiques. En 1963, le mathématicien américain Paul Cohen avait montré que l'hypothèse ne peut se déduire des axiomes de la théorie des ensembles, ce qui lui avait valu la médaille Fields. La théorie des topos a permis de retrouver ce résultat de manière plus simple.

Nul besoin de points pour exister

Contrairement aux points des espaces topologiques, ceux des topos ne font pas partie de la structure, mais ils ne disparaissent pas forcément : un point d'un topos T est un morphisme du topos ponctuel (la catégorie des ensembles) dans T. Un topos non vide n'a donc pas forcément de point. En revanche, dans un topos, il peut y avoir des morphismes entre les points, comme dans la situation décrite dans la figure de l'encart 4.

D'une certaine manière, le théorème de Banach-Tarski (*voir encart 5*), si difficile à accepter dans le cadre classique, et qui s'éclaire dans celui des topos, nous montre une certaine limite du choix qui prévaut depuis au moins Descartes, et qui consiste à modéliser (et même à penser !) l'espace comme un ensemble de points. Postulat d'ailleurs conforté par le point de vue ensembliste en vigueur depuis Cantor et Hilbert : dans les mathématiques "modernes", tous les objets sont des ensembles !

Le cadre des topos nous permet de sortir de ce carcan, car les topos n'ont pas besoin de points pour exister : il donne au au mathématicien - comme s'il avait chaussé de nouvelles lunettes - un nouvel outil d'exploration, plus fin, faisant apparaître de nouveaux objets et apportant de nouvelles réponses à d'anciennes questions.

Résumé

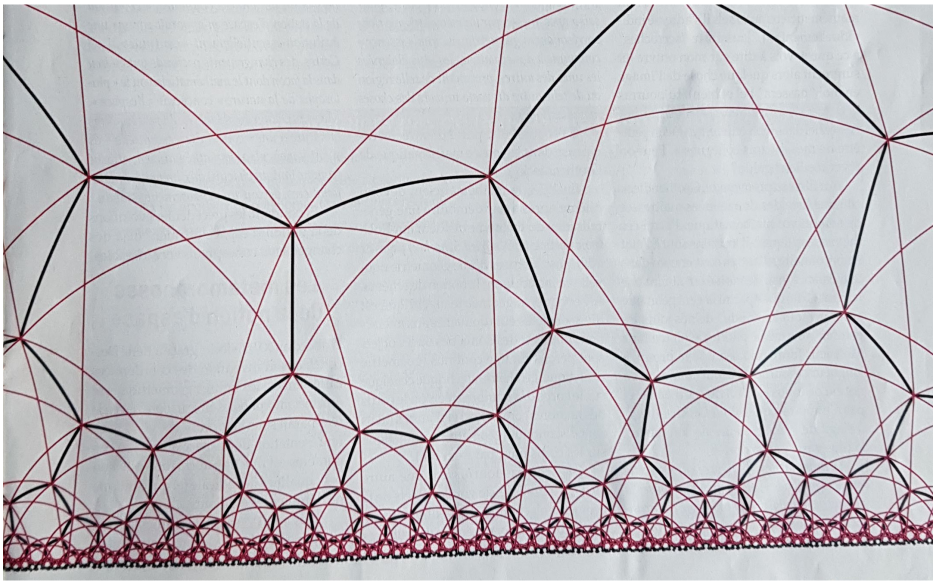
— Pour Grothendieck, la notion de topos est une idée majeure de son œuvre mathématique.

— Introduite au cours de sa refondation de la géométrie algébrique, elle offre un nouveau point de vue sur les objets de cette discipline et plus généralement, un cadre plus vaste où se rejoignent différentes branches des mathématiques.

— Les mathématiciens continuent d'explorer ce point de vue, dont ils trouvent des applications jusqu'en physique mathématique et en logique.

Illustration 1 : Un exemple de topos

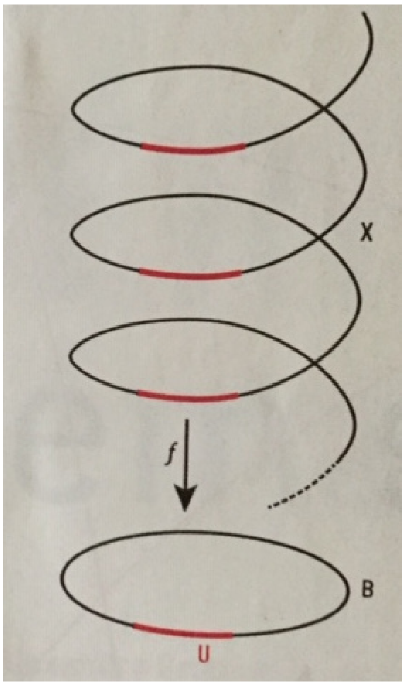
Un exemple de topos est représenté ci-dessous : le topos dit mixte constitué du demi-plan de Poincaré en géométrie hyperbolique et du groupe associé au pavage de type $(7, 3)$, où chaque pavé a 7 côtés et où chaque sommet est relié à 3 arêtes (en noir).



Encart 1 : Un revêtement étale du cercle

Un revêtement étale d'un espace topologique B est un espace (X, f) au-dessus de B (c'est-à-dire un espace X muni d'une application f continue de X dans B) qui vérifie la propriété suivante : il existe un recouvrement de B par des ouverts U (c'est-à-dire une famille d'ouverts U de B dont la réunion donne B) tels que, pour tout U, la partie de X au-dessus de U est une réunion de copies de U. On dit qu'un tel U trivialise le revêtement.

Par exemple, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle est un revêtement étale. Dans cet exemple, B est un cercle, X la droite réelle et f "l'enroulement de corde sur la poulie définie par le cercle", représenté comme une projection verticale (voir la figure ci-contre, où un ouvert U a été représenté). La notion de revêtement est fondamentale en topologie et la classification des revêtements d'un espace donné est souvent un des premiers chapitres des traités de topologie algébrique.



Encart 2 : Les premiers pas de la nouvelle géométrie

Avant les réflexions de Grothendieck et de son école, les objets de base de la géométrie algébrique étaient les anneaux de polynôme (à coefficients réels ou complexes) dont les éléments s'interprètent de manière assez évidente comme de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Grothendieck a voulu étendre à tous les anneaux (commutatifs) le champ de la géométrie algébrique. Pour cela, il fallait pouvoir, par analogie avec les anneaux de polynômes, considérer les éléments d'un anneau A quelconque comme des fonctions. C'était faisable, mais avec un certain prix à payer, comme le montre le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Pour considérer tout entier n de $\mathbb{Z}$ comme une fonction, il suffit d'associer à n une fonction définie sur le spectre de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres premiers) par sa valeur en chaque nombre premier p. On pose cette valeur égale au résidu modulo p de n dans le corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au reste de la division euclidienne de n par p. Le prix à payer est une différence essentielle avec le cas des anneaux de polynômes, car pour $\mathbb{Z}$, la fonction associée à n ne prend pas ses valeurs sur un corps unique comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais sur un corps différent $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour chaque nombre premier p. Toute la difficulté consistait donc à rassembler de manière cohérente tous ces corps. Et bien sûr à faire de même pour chaque anneau (commutatif avec élément unité). C'est le formalisme des faisceaux (voir ci-après) qui a donné la solution à Grothendieck et qui l'a conduit au langage des schémas.

La notion de faisceau avait été introduite quelques années plus tôt en 1946, par le mathématicien français Jean Leray. Prisonnier de guerre en Autriche, Leray participait à une université de captivité et, de peur d'être réquistionné pour travailler à l'effort de guerre allemand, il avait délaissé sa spécialité l'hydrodynamique, plus proche d'applications potentielles, pour y donner un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, il avait notamment cherché à reconstruire la topologie algébrique en se débarrassant des hypothèses inutiles. Dans la continuité de ses recherches, il avait conçu une première notion de faisceau sur un espace topologique, un outil qui lui permettait de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale. Jean-Pierre Serre a étendu ces méthodes à la géométrie algébrique, où Grothendieck les a utilisées et considérablement développées à son tour.

Encart 3 : La notion de faisceau

Un faisceau sur un espace topologique B n'est rien d'autre qu'un espace étalé sur B une notion qui s'apparente à celle de revêtement étale (voir encart 1), mais qui est plus faible.

Un espace étalé sur B est un espace (E, p) au-dessus de B où p est une applicaion qui a la propriété d'être un homéomorphisme local : autour de chaque point x de E, il existe un ouvert U de E le contenant tel que U soit une copie de son image $V = p(U)$ dans B.

Par exemple. les revêtements étales sont des espaces étalés, mais la réciproque est fausse : l'inclusion de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ dans la droite réelle $\mathbb{R}$ fait de lui un espace étalé sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{R}$ (il y a un probème au-dessus de 0 et 1...).

En quelque sorte, pour un revêtement étale, on demande d'être très simple "localement en bas", c'est-à-dire sur B, et pour un espace étalé, on demande d'être très simple "localement en haut", c'est-à-dire sur E, ce qui est une condition plus faible.

A un tel espace étalé (E, p) sur B, associons un foncteur F, défini sur l'ensemble des ouverts de B (c'est une catégorie) et à valeurs dans la catégorie des ensembles. Formellement, cela signifie qu'à tout ouvert U de B, on associe l'ensemble $F_E(U)$ des fonctions continues de U dans E qui, composées avec p, donnent l'identité de U. Alors pour U et V deux ouverts quelconques de B tels que V est inclus dans U, on a une application dite de restriction de $F_E(U)$ dans $F_E(V)$ qui, a chaque fonction sur U, associe sa restriction sur V.

On vérifie facilement que E peut être reconstitué à partir de F_E. On vérifie aussi la propriété fondamentale suivante sur F_E, dite propriété de recollement : si (U_i) est un recouvrement d'un ouvert U de B (c'est-à-dire une famille d'ouverts U dont la réunion donne U) et si on s'est donné pour chaque i un élément s_i de $F_E(U_i)$ tel que les s_i soient compatibles deux à deux (pour tout i et j les restrictions de s_i et de s_j sur l'intersection de U_i et U_j coïncident), alors il existe un et un seul élément s dans $F_E(U)$ dont les restrictions à chaque U_i sont précisément les s_i.

En résumé, des données "locales" compatibles (les s_i) permettent de définir une donnée "globale" unique (s) dans $F_E(U)$.

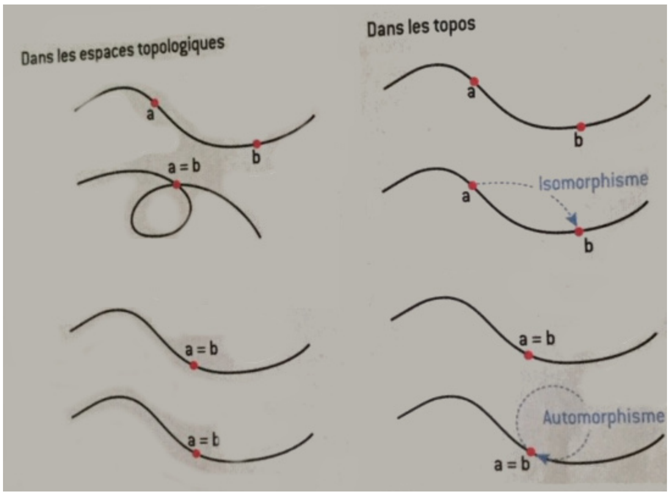
On part de cette définition de foncteur associé à un espace étalé pour définir la notion générale de faisceau sur un espace topologique B : un faisceau sur B est un foncteur sur la catégorie des ouverts de B vérifiant la propriété de recollement.

Cette propriété est ce qui permet de construire des objets globaux à partir de données locales - un outil d'une grande utilité en géométrie algébrique.

Encart 4 : Les topos font disparaître les cas particuliers.

Par exemple, pour identifier deux points a et b d'un segment dans le cadre classique des espaces topologiques, on fait une boucle avec le segment pour faire coïncider a et b, sauf dans le cas particulier où a et b sont confondus. Dans ce cas particulier, rien ne se passe. En revanche, dans le cadre des topos, pour identifier deux points sur un segment, on les recolle au moyen d'un isomorphisme, qui relie les points a et b.

Et si a et b sont confondus, l'isomorphisme existe toujours, c'est un automorphisme du point ; et on a encore une sorte de "boucle infinitésimale"...



Encart 5 : Le paradoxe de Banach-Tarski

Le point de vue des topos éclaire d'un jour nouveau un célèbre "paradoxe", le "paradoxe de Banach-Tarski", et le fait même disparaitre. Le théorème de Banach-Tarski entraîne l'existence d'une partition "paradoxale" de toute boule de rayon égal à 1 en quatre "pièces de Lego" identiques qui, prises deux à deux, permettent de reconstituer deux boules de rayon 1. Ces quatre pièces sont impossibles à dessiner, car on sait seulement, par le théorème, qu'elles existent. Elle ne sont pas non plus mesurables, c'est-à-dire qu'on ne peut pas leur attribuer de volume, car sinon, en additionnant leurs volumes, on aboutirait à une contradiction du type 1 = 1 + 1... Et pourtant, ces pièces de Lego existent, dit le théorème.

En fait, le paradoxe s'évanouit dans le cadre des topos, comme l'a montré Olivier Leroy en 1995. La partition ensembliste "paradoxale" n'est en effet plus une partition du point de vue toposique, car dans le cadre des topos, les pièces de Lego ne sont plus disjointes deux à deux : il existe des intersections de nature purement toposique (en fait elles n'ont pas de points) qui rendent mesurables tous les sous-topos de la boule et lèvent la contradiction. La vision classique ne les voit pas, il faut chausser de nouvelles lunettes pour les déceler.