Une nouvelle vision des nombres premiers

Denise Vella

Janvier 2007

1 Introduction

Dans cette note, nous présentons une nouvelle façon de considérer la primarité, basée sur des découvertes associant les tables de congruence de Gauss, la géométrie des nombres de Minkowski, et les considérations de Cantor.

2 Les Recherches arithmétiques de Gauss

Gauss est à l'origine de l'arithmétique modulaire. Ses *Disquisitiones Arithmeticae* sont agréables à lire car l'auteur y est pédagogue pour expliquer à la lectrice ses découvertes et résultats. Il y présente la notion de congruence, qui est une relation d'équivalence, et que nous utilisons naturellement dès qu'on nous apprend la division avec reste[1].
Dans la section suivante, nous utiliserons une table de congruence. Chaque case (i, j) d'une telle table contient $i \ mod \ j$, c'est à dire le nombre k tel que $i \equiv k \ (mod \ j)$

3 Trouver des équations de droites dans une table de congruence

La géométrie des nombres est un domaine créé par Minkowski, et dont on peut lire une description sommaire dans l'article *le théorème de Noël* du livre l'*Univers des Nombres* de Ian Stewart. Ce domaine a permis d'obtenir des démonstrations esthétiques : l'article présente celle du fait qu'un nombre premier de la forme $4n + 1$ est toujours somme de deux carrés.
En suivant cette leçon, on peut colorier les cases d'une table de congruence contenant des zéros qui exprime la divisibilité tout en repérant le fait que ces zéros se trouvent appartenir à des droites affines dont on va rechercher les équations :

[1] Bizarrement, le paragraphe 34 des Recherches Arithmétiques est noté 43 dans l'édition Jacques Gabay. On imagine mal Gauss se trompant dans l'écriture d'un nombre à deux chiffres. Le "prince des mathématiques" avait sûrement vu toutes les symétries-miroir des tables de congruence que nous venons tout juste de découvrir et que nous avons présentées dans une note *Conjecture de Goldbach et propriétés de symétrie-miroir d'une table de congruence* et l'a peut-être indiqué par un clin d'oeil en inversant les deux chiffres ; ou bien c'est tout simplement une erreur dactylographique...

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	1	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1	2	1	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	0	0	2	1	0	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1	1	3	2	1	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	0	2	0	3	2	1	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	1	0	1	4	3	2	1	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	0	1	2	0	4	3	2	1	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	1	2	3	1	5	4	3	2	1	0	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	0	0	0	2	0	5	4	3	2	1	0	12	12	12	12	12	12	12	12
13	1	1	1	3	1	6	5	4	3	2	1	0	13	13	13	13	13	13	13
14	0	2	2	4	2	0	6	5	4	3	2	1	0	14	14	14	14	14	14
15	1	0	3	0	3	1	7	6	5	4	3	2	1	0	15	15	15	15	15
16	0	1	0	1	4	2	0	7	6	5	4	3	2	1	0	16	16	16	16
17	1	2	1	2	5	3	1	8	7	6	5	4	3	2	1	0	17	17	17
18	0	0	2	3	0	4	2	0	8	7	6	5	4	3	2	1	0	18	18
19	1	1	3	4	1	5	3	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	19
20	0	2	0	0	2	6	4	2	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Dans cette table, la divisibilité de tout nombre par lui-même est coloriée en cyan, la divisibilité de tout nombre par sa moitié est coloriée en rouge, la divisibilité de tout nombre par son tiers en jaune, par son quart en vert, par son cinquième en bleu, par son sixième en magenta, par son septième en orange, par son huitième en bleu-turquoise, par son neuvième en gris, par son dixième en marron.

Trouvons les équations des droites de chaque couleur. Pour ça, considérons un repère cartésien : l'axe des abscisses (x) correspond à la ligne verticale des en-têtes de lignes orienté de telle façon que $+\infty$ soit en bas de la page, l'abscisse d'une case est l'en-tête de sa ligne ; l'axe des ordonnées (y) correspond à la ligne horizontale des en-têtes de colonnes si ce n'est qu'on va considérer que les cases de la colonne i ont pour ordonnée $i-2$ (pour s'approcher du $\frac{1}{2}$ de l'Hypothèse de Riemann). On n'a pas de risque à faire ce changement d'ordonnée car si on ajoute ou soustrait 2 à un entier, on obtient un entier tandis que si on ajoute ou soustrait 2 à une fraction rationnelle non entière, on obtient une fraction rationnelle non entière.
L'équation de la droite rouge est (divisibilité d'un nombre par sa moitié) :

$$x = 2y + 4.$$

L'équation de la droite jaune (divisibilité d'un nombre par son tiers) :

$$x = 3y + 6.$$

Plus généralement, l'équation de la i-ème droite (divisibilité d'un nombre par son i-ème) est

$$x = iy + 2i.$$

4 Primarité

A chaque nombre n est associé une droite d'équation $x = n$. Les équations de droite vont permettre de distinguer les nombres premiers des nombres composés mais pas tout à fait de la façon à laquelle on s'était habitué. Considérons le nombre 9.
Existe-t-il un x entier tel que $9 = 2x + 4$? Non, car $x = \frac{5}{2}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $9 = 3x + 6$? Oui, car $x = \frac{3}{3}$ est une fraction rationnelle entière.
Existe-t-il un x entier tel que $9 = 4x + 8$? Non, car $x = \frac{1}{4}$ est une fraction rationnelle non entière.
A cause de la réponse *oui* à la deuxième question, 9 n'est pas un nombre premier. Considérons le nombre 17.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 2x + 4$? Non, car $x = \frac{13}{2}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 3x + 6$? Non, car $x = \frac{11}{3}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 4x + 8$? Non, car $x = \frac{9}{4}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 5x + 10$? Non, car $x = \frac{7}{5}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 6x + 12$? Non, car $x = \frac{5}{6}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 7x + 14$? Non, car $x = \frac{3}{7}$ est une fraction rationnelle non entière.
Existe-t-il un x entier tel que $17 = 8x + 16$? Non, car $x = \frac{1}{8}$ est une fraction rationnelle non entière.
Donc 17 est premier. En généralisant, on voit qu'il s'agit d'associer à un nombre impair p (les nombres pairs n'étant trivialement pas premiers) un ensemble de $\frac{p-3}{2}$ fractions rationnelles dont le numérateur est un nombre impair variant de 1 à $p - 4$ et le dénominateur est un entier variant de $\frac{p-1}{2}$ à 2.

En annexe, est fournie une table qui fournit pour chaque nombre de 9 à 45 les fractions rationnelles qui doivent lui être associées. On voit que dans l'ensemble associé à un entier impair, toute fraction rationnelle dont le dénominateur est un diviseur de ce nombre est entière.

Il en résulte une nouvelle caractérisation des nombres premiers qui est :

$$p \textit{ premier} \iff \forall\, i,\ 1 \le i \le \frac{p-3}{2},\ \frac{4i+2}{p-2i-1} \notin \mathbb{N}$$

On peut encore améliorer cette caractérisation car si le numérateur d'une fraction est strictement inférieur à son dénominateur, elle ne peut être entière, ce qui est le cas dès que $i < \lceil \frac{p-3}{6} \rceil$ On se restreint donc finalement à la caractérisation suivante :

$$p\ premier \iff \forall\, i,\ \left\lceil \frac{p-3}{6} \right\rceil \leq i \leq \frac{p-3}{2},\ \frac{4i+2}{p-2i-1} \notin \mathbb{N}$$

Tout nombre impair peut donc être considéré comme établissant une correspondance biunivoque entre les entiers impairs croissant et les entiers tout court décroissants jusqu'à 2. Si cette correspondance ne donne lieu qu'à des fractions rationnelles non entières, le nombre est premier. Il est composé dans le cas contraire. Cette façon de voir les choses aurait peut-être intéressé Cantor, qui a travaillé sur la conjecture de Goldbach en 1894, en présentant une table des décompositions des nombres pairs de 6 à 1000 sous la forme de deux nombres premiers au congrès de l'AFAS.

5 Conjecture de Goldbach et Conjecture des nombres premiers jumeaux

La conjecture de Goldbach et la conjecture des nombres premiers jumeaux sont liées dans la mesure où elles font toutes deux partie du huitième problème de Hilbert qui concerne la démonstration de l'Hypothèse de Riemann. Une première conséquence de la nouvelle façon de considérer la primarité est qu'elle nous permet d'obtenir une formule qui permet de trouver les décomposants Goldbach d'un nombre pair et qui se note (on a laissé *prime*(i) pour alléger l'énoncé, mais on comprend aisément qu'on peut remplacer aussi cette condition par la condition sur fractions rationnelles correspondante :

$$\begin{aligned} Goldbach(2a,i,j) \iff\ & 3 \leq i \leq a \\ & \wedge\ prime(i) \\ & \wedge\ \forall\, j,\ 2 \leq j \leq a \Rightarrow \tfrac{2a-2j-i}{j} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

La deuxième conséquence de la nouvelle vision est que si l'union d'ensembles dépendante du nombre p impair ci-dessous ne contient que des fractions rationnelles non entières, alors p et $p+2$ sont des nombres premiers jumeaux.

$$\left\{ \frac{p-2}{2} \right\} \cup \bigcup_{\substack{j\ impair \\ 1 \leq j \leq p-4}} \left\{ \frac{2j}{p-j},\ \frac{2j}{p-j+2} \right\}$$

Les programmes de vérification en C++ qui permettent de vérifier que ces équations rationnelles ont bien comme solutions entières soit des nombres premiers, soit les décomposants Goldbach d'un nombre pair donné, soit les nombres premiers jumeaux peuvent être trouvés à l'adresse *http://denise.vella.chemla.free.fr*, dans l'onglet *Des notes et puis un jour l'Harmonie.*

6 Les preuves élémentaires d'Erdös

Erdös a été le mathématicien voyageur. La lecture de sa biographie le rend éminemment sympathique, il était très spirituel. Surtout, Erdös cherchait les

Preuves du Livre, il abordait les mathématiques artistiquement, il était en quête de démonstrations qui soient également esthétiques. Il paraît qu'il abordait les mathématiciens, du plus au moins connu, en leur disant : *"Mon cerveau est ouvert. Avez-vous un problème ?"*.
Le livre "Raisonnements divins" d'Aigner et Ziegler fournit la preuve élémentaire d'Erdös du théorème de Tchebychev. Il fournit aussi sa preuve, élémentaire également, de l'infinitude des nombres premiers. Ces preuves sont dites élémentaires car elles ne nécessitent pas l'utilisation d'outils de l'analyse complexe. Erdös a aussi prouvé avec Selberg le théorème des nombres premiers, à nouveau par une méthode élémentaire. Terminons ce paragraphe par une citation d'Erdös : *"Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne le sont pas, rien ne l'est."*.

7 Conclusion

On peut peut-être désormais utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est la moyenne arithmétique de deux nombres premiers"*. Concluons par deux citations d'Hilbert : *"Nous devons savoir et nous saurons ; il n'y a pas d'ignorabimus en mathématiques"* et puis un conseil qu'il donne à Klein : *"Il vous faut avoir un problème. Choisissez un objectif déterminé et marchez franchement vers lui. Vous pouvez ne jamais atteindre le but mais vous trouverez sûrement quelque chose d'intéressant en chemin"*. En mathématiques, il faut garder l'âme d'un *epsilon*[2] qui s'émerveille...

Bibliographie

M. Aigner, G.M. Ziegler. *Raisonnements divins.* Éd. Springer, 2002.

F. Casiro. *La conjecture de Goldbach, un défi en or.* Éd. Tangente n°78, décembre 2000, janvier 2001.

A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

L. Euler. *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Éd. Commentationes arithmeticae 2, p.639, 1849.

C.F. Gauss. *Recherches arithmétiques.* 1807. Éd. Jacques Gabay, 1989.

J. Hadamard. *Essai sur la psychologie de l'invention mathématique suivi de H. Poincaré, l'invention mathématique.* Éd. Jacques Gabay, 1959.

P. Hoffman. *Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres.* Éd. Belin, 2000.

O. Kerléguer, D. Dumont. *Des images pour les nombres.* Éd. ACL du Kangourou, 2001.

D. Nordon. *Les obstinations d'un mathématicien.* Éd. Belin Pour la Science, 2003.

A. Sainte Laguë. *Avec des nombres et des lignes.* Éd. Vuibert, 1937.

I. Stewart. *L'univers des nombres.* Éd. Belin Pour la Science, 2000.

G. Tenenbaum, M. Mendès France. *Les nombres premiers.* Éd. Que sais-je ?, n°571, 1997.

[2]C'est ainsi qu'Erdös désignait les enfants.

A. Warusfel. *Les nombres et leurs mystères.* Éd. Points Sciences, 1961.

Annexe 1 : un article merveilleux d'Euler

L'article d'Euler "Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs peut être trouvé au format *pdf* dans la page http://math-doc.ujf-grenoble.fr/OEUVRES/

Annexe 2 : association de fractions rationnelles aux nombres de 9 à 45

9	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{2}$										
11	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2}$									
13	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{2}$								
15	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{2}$							
17	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{2}$						
19	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{15}{2}$					
21	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{17}{2}$				
23	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{19}{2}$			
25	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{21}{2}$		
27	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{19}{4}$	$\frac{21}{3}$	$\frac{23}{2}$	
29	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{19}{5}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{25}{2}$

31	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{27}{2}$	
33	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{11}{11}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{15}{9}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{29}{2}$
35	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{21}{7}$	$\frac{23}{6}$	$\frac{25}{5}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{29}{3}$
	$\frac{31}{2}$														
37	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{15}{11}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{19}{9}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{29}{4}$
	$\frac{31}{3}$	$\frac{33}{2}$													
39	$\frac{1}{19}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{13}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{27}{6}$	$\frac{29}{5}$
	$\frac{31}{4}$	$\frac{33}{3}$	$\frac{35}{2}$												
41	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{15}{13}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{29}{6}$
	$\frac{31}{5}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{35}{3}$	$\frac{37}{2}$											
43	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{17}{13}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{29}{7}$
	$\frac{31}{6}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{37}{3}$	$\frac{39}{2}$										
45	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{11}{17}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{17}{14}$	$\frac{19}{13}$	$\frac{21}{12}$	$\frac{23}{11}$			
	$\frac{25}{10}$	$\frac{27}{9}$	$\frac{29}{8}$	$\frac{31}{7}$	$\frac{33}{6}$	$\frac{35}{5}$	$\frac{37}{4}$	$\frac{39}{3}$	$\frac{41}{2}$						

Annexe : Citations littéraires

Des citations tirées du livre *La symphonie des nombres premiers* de Marcus du Sautoy.

Henri Poincaré : Le scientifique n'étudie pas la Nature parce qu'elle est utile ; il l'étudie parce qu'elle le réjouit. Et elle le réjouit parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, et si la Nature ne valait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.

Hardy : Je pense que la réalité mathématique existe en dehors de nous, que notre fonction est de la découvrir ou de l'observer et que les théorèmes que nous démontrons et que nous décrivons avec grandiloquence comme nos créations sont simplement les notes de nos observations.

Gauss a coiffé Legendre sur le poteau au sujet du lien entre les nombres premiers et les logarithmes. Cela nous est révélé dans une lettre de Gauss à Encke, écrite le soir de Noël 1849[3].

Lagrange conseilla au père de Cauchy : Veillez à ce qu'il ne touche pas de livre de mathématiques avant ses 17 ans. Au lieu de cela, il suggéra de stimuler les talents littéraires de l'enfant si bien que, le jour où il reviendrait aux mathématiques, il serait capable de parler de sa propre voix mathématique, non en imitant ce qu'il aurait prélevé dans les ouvrages de l'époque.

Hardy à propos de Ramanujan : il était porteur d'un handicap insurmontable, pauvre hindou solitaire s'attaquant à la sagesse accumulée de l'Europe.

Ramanujan commençait à se dire que la priorité que Hardy accordait à la rigueur mathématique empêchait son esprit de parcourir librement le paysage mathématique.

Julia Robinson : Je souhaitais toujours à chacun de mes anniversaires et d'année en année que le dixième problème de Hilbert soit résolu. Pas par moi, mais simplement qu'il soit résolu. J'avais le sentiment que je ne pourrais accepter de mourir sans connaître la réponse.

Gauss : le problème de distinguer les nombres premiers des nombres composés et de décomposer ceux-ci en leurs facteurs premiers est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique. [...] En outre, la dignité de la Science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

[3] 157 ans sépare Noel 1849 de Noël 2006. Déduisez-en la primarité de 157 !