*Interrupteurs ou bien une somme alternée de cosinus assez surprenante (Denise Vella-Chemla, 4.11.2018)*

A la suite d'une note publiée en juillet 2014 [1], on propose la fonction somme alternée suivante qui associe $\dfrac{1}{2}$ aux nombres premiers et des valeurs différentes de $\dfrac{1}{2}$ aux nombres composés :

$$f_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} \left( cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right) \times (-1)^{\frac{k^2-k-2+2l}{2}} \right) - 1 + \left( (-1)^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{2} \right)$$

Les cosinus d'angles opposés s'éliminent "presque tous" pour les nombres premiers, du fait de leur insécabilité.

Au contraire, pour les nombres composés, leur divisibilité par des nombres qui leur sont inférieurs entraîne par l'ajout des cosinus l'ajout d'un certain nombre d'unités.

Cette propriété rend la somme des cosinus :

- égale à 2 pour les nombres premiers de la forme $4k+3$,
- et égale à 1 pour les nombres premiers de la forme $4k+1$.

Le fait d'ajouter en dernier lieu au résultat $-1+\left((-1)^{\frac{n}{2}} \times \dfrac{1}{2}\right)$ à la somme de cosinus permet de "ramener" les images des nombres premiers égales à 2 ou 1 sur l'image $\dfrac{1}{2}$.

On fait calculer par programme cette somme alternée de cosinus pour les entiers jusqu'à 10000 [2].

Cette somme alternée présente la propriété suivante : pour les puissances de nombres premiers, la fonction $f_D(n)$ coïncide avec des fonctions affines ; ainsi, $f_D(9) = 6.5, f_D(27) = 24.5, f_D(81) = 78.5$, i.e. $f_D(x = 3^k) = x - 2.5$ ; ou bien $f_D(25) = 10.5, f_D(125) = 60.5, f_D(625) = 310.5, f_D(3125) = 1560.5$, i.e. $f_D(x = 5^k) = \frac{1}{2}x - 2$ ; etc.

On trouve la formule générale pour les puissances de premiers $x = p^k$ : si on note $f_D(x) = ax - b$, $a$ est égal à $\dfrac{2}{p-1}$ et $b$ est égal à $\dfrac{3p+1}{2p-2}$.

Pour les nombres dont la factorisation fait intervenir plusieurs nombres premiers différents, on n'arrive pas à dégager de formule générale qui coïnciderait avec la somme alternée de cosinus qu'on a proposée.

On est intrigué par ces résultats et on revient à l'idée initiale qui consistait à calculer la somme suivante :

$$g_D(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k} cos\left(\frac{2\pi nl}{k}\right)$$

On fait calculer à nouveau par programme cette somme de cosinus pour les entiers jusqu'à 1000 [3].

Les images des puissances de nombres premiers obéissent à la formule :

$$g_D(p^k) = \frac{p^k - p}{p-1}$$

Les images des doubles de nombres premiers obéissent à la formule :

$$g_D(2p) = p + 2$$

1. http://denise.vella.chemla.free.fr/primesommecos.pdf
2. Le programme de calcul de $f_D(n)$ peut être trouvé ici http://denise.vella.chemla.free.fr/trouveformuleoppose.pdf. Le résultat du programme peut être trouvé ici http://denise.vella.chemla.free.fr/affin.pdf
3. Le programme de calcul de $g_D(n)$ peut être trouvé ici http://denise.vella.chemla.free.fr/sumsumcos.pdf. Le résultat du programme peut être trouvé ici http://denise.vella.chemla.free.fr/ressumsumcos.pdf

Les images des produits simples de nombres premiers (à la puissance 1) obéissent à la formule :

$$g_D(pq) = p + q$$

Par exemple, $g_D(21) = g_D(3 \times 7) = 3 + 7 = 10$ ou bien $g_D(10) = g_D(2 \times 5) = 2 + 5 = 7$.

Le calcul de $g_D(210) = g_D(2 \times 3 \times 5 \times 7) = 2+3+5+7+6+10+14+15+21+35+30+42+70+105 = 365$. La fonction $g_D(n)$ est ainsi très simple à calculer pour les produits de nombres premiers simples.

Pour les produits faisant intervenir des puissances, si $p = 2$ et $k > 1$ ou bien si $p > 2$, on peut appliquer la formule :

$$g_D(p^k \times x) = (p+1)g_D(p^{k-1} \times x).$$