

On voudrait garder trace ici d'une petite expérience de pensée motivée par le souvenir d'une conférence de Gérard Berry dans laquelle il décrivait la « machine chimique ». L'extrait video est consultable ici, minute 47'31 : <https://www.college-de-france.fr/site/gerard-berry/course-2008-01-25-10h30.htm>.

On trouve dans le résumé du cours de l'année suivante ([1], p.21/30) l'extrait et l'image ci-dessous :

4.5. La machine chimique

La machine chimique ou CHAM a été introduite par moi-même et G. Boudol [Berry et Boudol, 1992]. Les processus y sont représentés par des molécules portant des valences d'interaction, nageant conceptuellement dans une solution, et pouvant librement se rencontrer à tout moment ; techniquement, cela s'exprime par de la réécriture de multi-ensembles. Une molécule peut hiérarchiquement contenir d'autres solutions contenues dans des membranes perméables aux valences. La machine la plus simple est le crible de Darwin de la figure 11 pour calculer les nombres premiers. Il utilise la règle chimique $p, kp \rightarrow p$ (tout nombre mange ses multiples). Un exemple plus complexe lié à CCS est présenté dans les transparents et vidéos.

918

GÉRARD BERRY

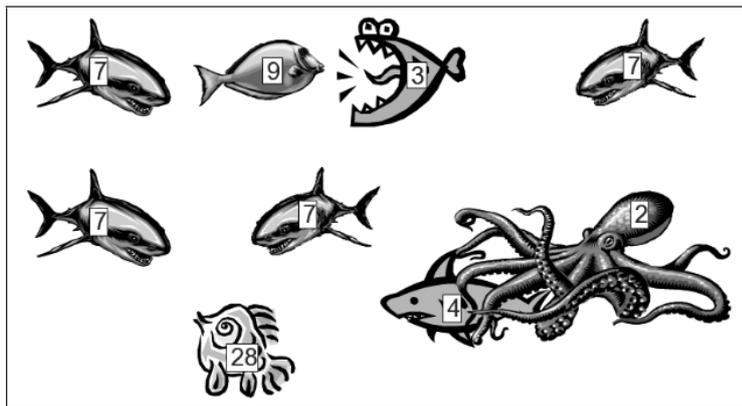


Figure 11 : le crible chimique de Darwin

Si l'on souhaite modéliser cela par des ensembles et une seule opération, on n'a qu'à considérer l'ensemble des multiples entiers de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 et l'opération différence ensembliste, qu'on note habituellement \setminus .

La différence ensembliste (comme la différence des nombres) est une opération non-commutative. Considérons l'ensemble des multiples de 2, qu'on note E_2 et l'ensemble des multiples de 4 qu'on note E_4 ; alors on a « $6 \in E_2 \setminus E_4$ » alors que « $E_4 \setminus E_2 = \emptyset$ », ce qui s'exprime en français courant par « 6 est un multiple de 2 sans être un multiple de 4 » pour la première assertion et « tout multiple de 4 est un multiple de 2 » pour la seconde assertion.

Si notre objectif est de trouver un moyen qui permette de ne conserver que les nombres premiers et eux seuls, on peut considérer, et cela correspond au fonctionnement de la machine chimique de Berry & Boudol, que l'on travaille sur l'ensemble de tous les ensembles de multiples de tous les entiers supérieurs ou égaux à 2 et que chaque ensemble est mis en relation avec tous les autres ensembles par différence ensembliste. Par un tel processus, un ensemble des multiples d'un nombre composé quel qu'il soit sera vidé, tandis qu'un ensemble des multiples d'un nombre premier va se trouver vidé de tous les nombres qui ne sont pas le nombre premier en question et ainsi être transformé en le singleton contenant le nombre premier considéré et lui seul. Par la magie des seules différences ensemblistes, on trouve, en appliquant les différences simultanément à tous les ensembles de multiples pris 2 à 2, tous les singletons possibles contenant

un nombre premier chacun. C'est le crible d'Eratosthène regardé selon un point de vue ensembliste.

Remarque : la différence ensembliste n'est pas une opération associative : $\{1, 2, 3, 4\} \setminus (\{3, 4\} \setminus \{4\}) \neq (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4\}) \setminus \{4\}$ puisque $\{1, 2, 3, 4\} \setminus (\{3, 4\} \setminus \{4\}) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$ tandis que $(\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4\}) \setminus \{4\} = \{1, 2\} \setminus \{4\} = \{1, 2\}$; je ne sais pas si, de ce fait, cette petite expérience de pensée présente un intérêt pour les mathématiciens.

Bibliographie

[1] Gérard Berry, résumé du cours au Collège de France 2009-2010, Penser, modéliser et maîtriser le calcul informatique (Chaire Informatique et sciences numériques) : https://www.college-de-france.fr/media/gerard-berry/UPL7123112924601846267_R0910_Berry.pdf