Les points de l'espace Goldbach commutent-ils ? (Denise Vella-Chemla, 5.6.2017)

On rappelle l'espace qu'on a choisi pour étudier la conjecture de Goldbach. On met en regard de cet espace deux axes de coordonnées cartésiennes habituels si ce n'est que les ordonnées croissent vers le bas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	x
1	$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$	
2	$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$	
3	$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$	
4	$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$	
5	$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$	
6	$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$	
7	$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$	
8	$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$	
9	$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$	
10	$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$	
y									

La fonction suivante d permet de trouver la somme $s1+s2$ associée à tel ou tel point du plan ($s1$ pour premier sommant et $s2$ pour second sommant).

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y-2x+3 \end{pmatrix}$$

On la représente par la matrice 3×3 : $M : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui permet d'associer au sommet du plan de coordonnées (x, y) représenté par le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ la somme $(2x+1)+(2y-2x+3)$.

On peut étudier comment inverser les sommants de la somme $s1+s2$ pour obtenir la somme $s2+s1$. On représente cette opération par la matrice 3×3 : $N : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deux façons de procéder sont envisageables :

- on a un point du plan euclidien de coordonnées (x, y), on trouve la somme associée à ce point en appliquant l'opérateur M, on inverse les sommants en appliquant N, on applique l'opérateur M^{-1} inverse de M pour trouver les coordonnées du nouveau point ;

- on applique directement aux coordonnées du point auquel est associée la somme $s1+s2$ un opérateur qui permet de trouver les coordonnées du point correspondant à la somme inversée $s2+s1$ et qui est P : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Cet opérateur correspond à une transformation affine dite *symétrie oblique* par rapport à une droite de pente -2 qui passe par les sommes triviales de la forme $x+x$ (correspondant aux décompositions triviales de Goldbach). Un point et son image ont même ordonnée par cette symétrie oblique.

On vérifie qu'on a bien $M^{-1}NM = P$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux éléments font de notre espace Goldbach un espace non-commutatif :

- d'une part, le fait que les opérateurs identifiés ci-dessus ne commutent pas. Par exemple,

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  tandis que

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

- d'autre part, on distingue la somme $s1 + s2$ de la somme $s2 + s1$, l'ordre des sommants étant très important pour les comptages, une décomposition de Goldbach de la forme *premier* + *composé* n'étant pas comptabilisée par la même variable qu'une décomposition de la forme *composé*+*premier*.