Retour à l'indicatrice φ d'Euler (Denise Vella-Chemla, 29.4.2023)

On rappelle la définition suivante : A et B sont premiers l'un à l'autre si leur plus grand diviseur commun (pgcd) est égal à 1.

Si $n = p + (n - p)$ est une décomposition de Goldbach de n, un nombre pair supérieur à 4, alors p et $n - p$ sont deux nombres premiers. Considérons un nombre premier p supérieur à $\sqrt{n}$, il est premier au produit des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. Son complémentaire à n également est premier à ce produit. Et le produit $p(n - p)$ est lui aussi premier au produit en question des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Cette constatation permet de trouver d'une façon particulière les décomposants de Goldbach p d'un nombre pair n (≥ 6) qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$. On teste simplement que le produit $A = p(n - p)$ est premier à $B = \prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q$. Si tel est le cas, p est un décomposant de Goldbach de n.

Pour n un nombre pair, on a $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ nombres impairs qui sont des décomposants de Goldbach potentiels de n.

L'indicatrice d'Euler, $\varphi(k)$ compte le nombre de nombres inférieurs à k et premiers à k, i.e. le nombre de nombres qui ont pour pgcd avec k le nombre 1 (on dit aussi qui n'ont pas de facteur commun qui soit supérieur à 1 avec k).

Question 1 : peut-on dire que la probabilité pour un nombre inférieur à k d'être premier à k est égale à $\dfrac{\varphi(k)}{k}$?

Question 2 : peut-on dire qu'un certain nombre de nombres inférieurs à un entier donné k, ces nombres étant en quantité x, ont $x \times \dfrac{\varphi(k)}{k}$ chances à eux tous que l'un d'entre eux au moins soit premier à k ?

Si l'on pouvait répondre par l'affirmative à ces deux questions, cela serait très arrangeant, car on pourrait alors dire que les $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor$ nombres impairs décomposants de Goldbach potentiels du nombre n ont à eux tous $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor \times \dfrac{\varphi\left(\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q\right)}{\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q}$ chances que l'un d'entre eux soit premier à $\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q$, i.e. soit un décomposant de Goldbach de n et ce nombre de chances d'être un décomposant de Goldbach de n est supérieur strictement à 1 à partir de $n = 10$ et au-delà, semble-t-il par programme.