Condenser (Denise Vella-Chemla, 8.10.2022)[1]

On fournit le code d'un programme court qui distingue les nombres premiers des nombres composés par leur image par une fonction simple :

$$f_D(n)=\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{k}\exp\left(\frac{2\pi\ inl}{k}\right)+\left(\frac{1}{2}i^n-1\right)$$

Pour n impair premier, $\mathfrak{Re}(f_D(n))=2\times\mathfrak{Im}(f_D(n))$, ce qui n'est pas le cas pour n impair composé.

On avait étudié une fonction similaire après des travaux autour de la somme des diviseurs suite à la lecture d'un article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.*

On peut calculer la somme des diviseurs des nombres comme une somme de cosinus.

Pour $n\geq 1$, on définit :

$$\sigma(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\cos\frac{2i\pi nl}{k}.$$

Pour $1\leq k\leq n$, on a :

$$\sigma_k(n)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\exp\left(\frac{2i\pi nl}{k}\right) & = k \ \text{ si } \ k|n;\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{k}\exp\left(\frac{2i\pi nl}{k}\right) = \sum_{l=1}^{k}\left(\exp\left(\frac{2i\pi n}{k}\right)\right)^l & \\ \displaystyle\qquad = \frac{\left(\exp\left(\frac{2i\pi n}{k}\right)\right)^{k+1}-1}{\exp\left(\frac{2i\pi n}{k}\right)-1} & \\ \displaystyle\qquad = \exp\left(\tfrac{2i\pi n}{k}\right)\left(\frac{\exp\left(2i\pi n\right)-1}{\exp\left(\frac{2i\pi n}{k}\right)-1}\right) & = 0 \ \text{ sinon}\end{cases}$$

On en déduit que $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n :

$$\sigma(n)=\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{Re}(\sigma_k(n))=\sum_{k|n}k.$$

En ajoutant $\frac{1}{2}i^k-1$ à chacun des termes de $\sigma(n)$, et en ne considérant que les diviseurs non triviaux de

[1] Merci Jacques.

n, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{k}\left(e^{\frac{2i\pi nl}{k}+\frac{1}{2}i^n-1}\right) &= \sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{k} e^{\frac{2i\pi nl}{k}+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{2}i^n-1\right)} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\sigma_k(n) + \sum_{k=2}^{n-1} k(\tfrac{1}{2}i^n-1) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\sigma_k(n) + (\tfrac{1}{2}i^n-1)\sum_{k=2}^{n-1} k \\
&= \sigma(n)-\sigma_1(n)-\sigma_n(n)+(\tfrac{1}{2}i^n-1)(\tfrac{1}{2}n(n-1)-1) \\
&= \sigma(n)-1-n+(\tfrac{1}{2}i^n-1)(\tfrac{1}{2}n^2-\tfrac{1}{2}n-1) \\
&= \sigma(n)-\tfrac{1}{2}n^2-\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}i^n(\tfrac{1}{2}n^2-\tfrac{1}{2}n-1) \\
&= \begin{cases}
\sigma(n)-\frac{1}{4}n^2-\frac{3}{4}n-\frac{1}{2} & \text{si} \quad n \mod 4 = 0 \\
\sigma(n)-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}i(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1) & \text{si} \quad n \mod 4 = 1 \\
\sigma(n)-\frac{3}{4}n^2-\frac{1}{4}n+\frac{1}{2} & \text{si} \quad n \mod 4 = 2 \\
\sigma(n)-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}i(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1) & \text{si} \quad n \mod 4 = 3
\end{cases}
\end{aligned}$$

La distinction entre premiers et composés ne provient donc que de la seule somme des diviseurs, égale à $n+1$ pour n premier et strictement supérieure à $n+1$ sinon.