Petits triangles (Denise Vella-Chemla, 11.5.2022)

Dans une note précédente[1], on a démontré qu'un nombre premier supérieur à $\sqrt{n}$ et inférieur ou égal à $n/2$, et qui n'est jamais congru à n modulo tout nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ est un décomposant de Goldbach de n.

Il s'agit de démontrer qu'un tel nombre existe toujours.

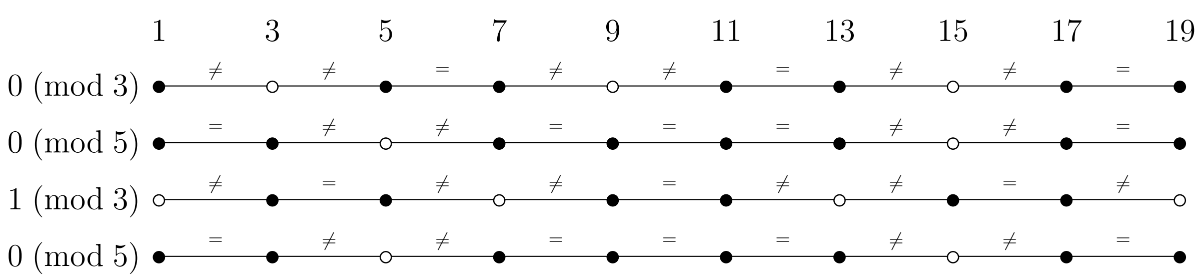
À l'aide d'un exemple (la recherche des décomposants de Goldbach du nombre pair 40), on montre l'idée topologique qu'on suit en ce moment.

On aimerait utiliser la distance triviale (ou distance discrète, voir définition en annexe) et le fait que tout triangle est isocèle dans un espace ultramétrique.

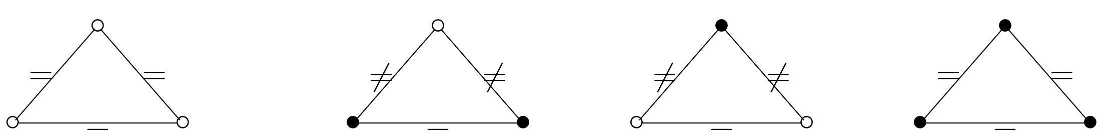
À la recherche des décomposants de Goldbach de 40, on commence par dessiner des lignes de nœuds, reliés par des arcs.

- les 2 premières lignes de nœuds correspondent aux relations entre les nombres impairs (notés sur une ligne à part en haut, en regard des lignes de nœuds, et le reste nul selon tout module premier impair inférieur à la racine de n (ici, 3 et 5, inférieurs à $\sqrt{40} \simeq 6, \ldots$) ; ces lignes font apparaître la divisibilité par tel ou tel nombre premier ;
- les 2 lignes suivantes montrent le fait qu'un nombre a le même reste que le nombre $n = 40$ selon ces mêmes nombres premiers choisis comme modules.

Remarque : comme 5 divise 40, il y a redondance entre la deuxième et la quatrième ligne, on maintient cette redondance, pour avoir exactement $2\,(\pi(\sqrt{n}) - 1)$ lignes, simplement ($\pi(x)$ représente comme habituellement le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et on soustrait 1 parce qu'on oublie 2 en se concentrant sur les impairs, pour des raisons de lisibilité de l'exemple).



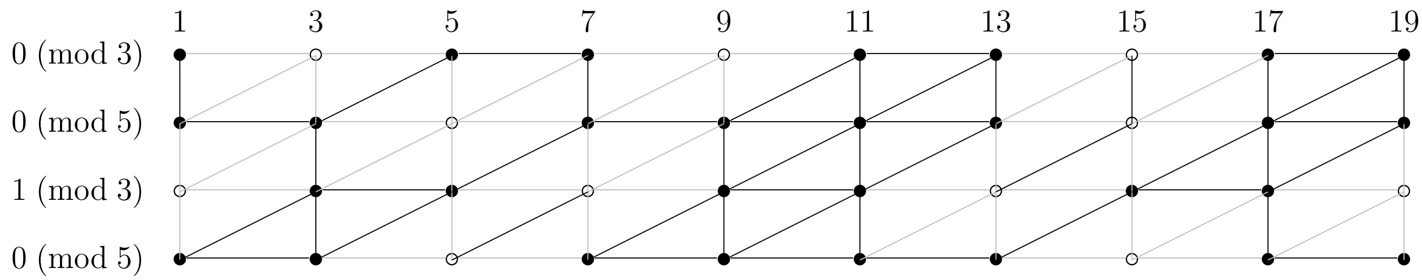
Dans une seconde étape, triangulons : dans un espace ultramétrique muni de la distance triviale, tout triangle est isocèle. Les 4 triangles possibles sont :



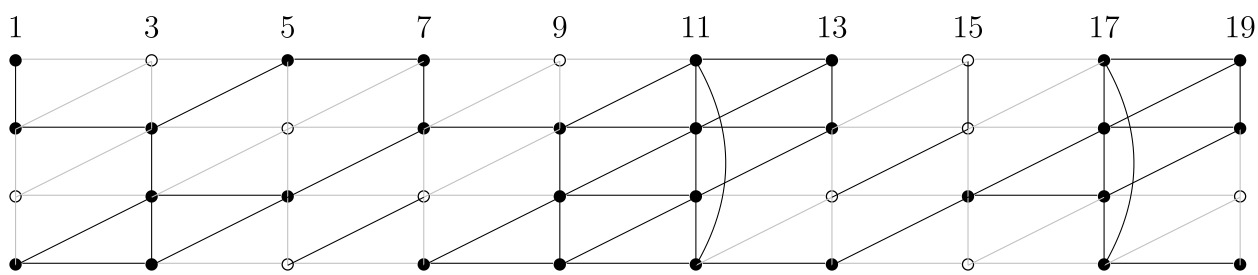
[1]http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf.

Ces petits triangles correspondent aux phrases : “deux nombres égaux à un même troisième sont égaux”, “si deux nombres sont différents, un nombre égal à l’un de ces deux nombres est différent de l’autre de ces deux nombres”.

Voici le résultat de l’action de triangulation appliquée aux 3 lignes initiales. Pour améliorer la lisibilité du graphe, on a remplacé les arcs étiquetés par le signe $=$ par des arcs noirs et ceux étiquetés par le signe $\neq$ par des arcs gris clair.



Pour finir, on ajoute des “arcs-ponts” verticalement “partout” (ce qui ne sera pas fait ci-après), parce que cela permettra de ramener la conjecture de Goldbach à la recherche d’un cycle. Montrons les seuls ajouts de 2 arcs-ponts, d’une part pour ne pas surcharger le dessin, d’autre part pour voir les deux décomposants de Goldbach de 40 supérieurs à $\sqrt{40}$ que sont 11 et 17.



Démontrer la conjecture de Goldbach consiste alors à démontrer l’existence d’un cycle de longueur $2(\pi(\sqrt{n})-1)$ dans le graphe, cycle dont tous les arcs seraient étiquetés par le signe $=$. Mais cette condition ne suffit pas, on voit dans cet exemple un certain nombre de parallélogrammes de côtés colorés en noir qui sont autant de cycles. Il faudrait caractériser le fait que les nœuds du cycle sont dans une configuration verticale du graphe (i.e. correspondent à un même nombre). De plus, on ne sait pas démontrer l’existence d’un tel cycle.

Annexe : définitions

On recopie ici les définitions de la distance triviale et de la topologie discrète trouvées sur wikipedia.

La distance triviale (ou encore distance discrète ou métrique discrète) est définie sur tout ensemble par : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$. La topologie associée est la topologie discrète.

En topologie, la topologie discrète sur un ensemble est une structure d'espace topologique où, de façon intuitive, tous les points sont “isolés” les uns des autres.

Soit X un ensemble. L'ensemble des parties de X définit une topologie sur X appelée topologie discrète. X muni de cette topologie est alors appelé espace discret.

On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est un ensemble discret lorsque la topologie induite sur A est la topologie discrète.