Petits décomposants de Goldbach (Denise Vella-Chemla, 18.4.2023)

Un nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est un décomposant de Goldbach de n, un nombre pair supérieur ou égal à 6 (i.e. $n-p$ est un nombre premier également), s'il vérifie :

$$\forall q, 3 \leq q \leq \sqrt{n} \text{ et } q \text{ premier} \implies p \not\equiv n \pmod{q}.$$

En effet, l'assertion $p \not\equiv n \pmod{q}$ est équivalente à $n-p \not\equiv 0 \pmod{q}$ et cette dernière assertion entraîne que $n-p$ est un nombre premier (il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée, puisque $a \not\equiv 0 \pmod{b}$ est équivalent au fait que $b \nmid a$). Ainsi, $n = p+(n-p)$ est une décomposition de n comme somme de deux nombres premiers, et n vérifie la conjecture de Goldbach.

Jusqu'à 100 000, 7,3 % des nombres pairs seulement ont comme plus petit décomposant de Goldbach un nombre qui est supérieur strictement à leur racine. La majorité des nombres semblent avoir chacun (du moins jusqu'à 10^8) un "petit" décomposant de Goldbach.

De 100 000 à 10^8, par programme, on ne trouve aucun nombre pair qui aurait comme plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier supérieur à sa racine, c'est le cas par exemple pour le nombre pair $81099776 = 139 + 81099637$ avec $139 < \sqrt{81099776}$ $(= 9005, 54...)$. En note, on fournit la liste des 70 nombres inférieurs à 100 000 ayant pour plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier supérieur à leur racine[1].

Cette constatation amène à proposer le calcul suivant : si l'on pense que p à $\dfrac{1}{q}$ chances d'être congru à n modulo q, et que la probabilité d'être congru à n modulo q_1 *ou bien* à n modulo q_2 est la somme des probabilités $\dfrac{1}{q_1}$ et $\dfrac{1}{q_2}$, alors on obtient la probabilité pour l'ensemble des nombres premiers compris entre 3 et $\sqrt{n}$, qui sont au nombre de $\pi(\sqrt{n})^2$ de n'être, chacun, jamais congru à n selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$ en ajoutant toutes les probabilités

$$S = \sum_{\substack{3 \leq q_k \leq \sqrt{n} \\ q_k \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{q_k}\right)$$

Or on a $\displaystyle\sum_{\substack{3 \leq q_k \leq \sqrt{n} \\ q_k \text{ premier}}} \frac{1}{q_k} = \ln \ln \sqrt{n}$, ce qui permettrait d'obtenir pour S la valeur :

$$(\pi(\sqrt{n}) - 1) - \ln \ln \sqrt{n}$$

S est supérieur à 1 pour $n \geq 50$.

[1] Les 73 nombres pairs inférieurs à 100 000 ayant pour plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier qui est supérieur à leur racine : 6, 8, 12, 18, 24, 30, 38, 98, 122, 126, 128, 220, 302, 332, 346, 488, 556, 854, 908, 962, 992, 1144, 1150, 1274, 1354, 1360, 1362, 1382, 1408, 1424, 1532, 1768, 1856, 1928, 2078, 2188, 2200, 2438, 2512, 2530, 2618, 2642, 3458, 3818, 3848, 4618, 4886, 5372, 5978, 6002, 6008, 7426, 9596, 9602, 10268, 10622, 11438, 11642, 12886, 13148, 13562, 14198, 14678, 16502, 18908, 21368, 22832, 23426, 23456, 43532, 54244, 63274.

[2] On utilise la notation $\pi(x)$ habituelle pour désigner le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

On avait, à la place de cette idée d'ajouter les probabilités, proposé à l'été 2019 d'utiliser plutôt une multiplication du nombre de nombres premiers inférieurs à $n/2$ (ce nombre de nombres premiers étant égal à $A = \dfrac{n/2}{\ln(n/2)}$) par le produit $B = \displaystyle\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq \sqrt{n}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ dont Mertens a démontré qu'il est égal à $\dfrac{1}{e^{\gamma} \ln(p_{max})} \left(1 + O\left(\dfrac{1}{\ln p_{max}}\right)\right)$, ce théorème étant valable pour $n \geq 2$, où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni. Ce second produit B représente la probabilité qu'a chaque nombre premier, dont le nombre est compté par A, d'être congru à n selon un module premier inférieur à $\sqrt{n}$ (i.e. d'avoir le même reste, dans une division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$).

La formule pour la probabilité devient :

$$S' = \frac{n/2}{\ln(n/2)} \frac{1}{e^{\gamma} \ln(p_{max})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

qui est supérieur à 1 pour 6 et 8, inférieur à 1 jusqu'à 2422, puis semble repasser définitivement au-dessus de 1 à partir de ce nombre 2422.

Factorisations des nombres dont le plus petit décomposant de Goldbach est supérieur à leur racine (où l'on voit tout l'alea associé aux nombres premiers) :

$6 = 2 \times 3$
$8 = 2^3$
$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$24 = 2^3 \times 3$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$38 = 2 \times 19$
$98 = 2 \times 7^2$
$122 = 2 \times 61$
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$128 = 2^7$
$220 = 2^2 \times 5 \times 11$
$302 = 2 \times 151$
$332 = 2^2 \times 83$
$346 = 2 \times 173$
$488 = 2^3 \times 61$
$556 = 2^2 \times 139$
$854 = 2 \times 7 \times 61$
$908 = 2^2 \times 227$
$962 = 2 \times 13 \times 37$
$992 = 2^5 \times 31$
$1144 = 2^3 \times 11 \times 13$
$1150 = 2 \times 5^2 \times 23$
$1274 = 2 \times 7^2 \times 13$
$1354 = 2 \times 677$
$1360 = 2^4 \times 5 \times 17$
$1362 = 2 \times 3 \times 227$
$1382 = 2 \times 691$
$1408 = 2^7 \times 11$
$1424 = 2^4 \times 89$
$1532 = 2^2 \times 383$
$1768 = 2^3 \times 13 \times 17$
$1856 = 2^6 \times 29$
$1928 = 2^3 \times 241$
$2078 = 2 \times 1039$
$2188 = 2^2 \times 547$
$2200 = 2^3 \times 5^2 \times 11$
$2438 = 2 \times 23 \times 53$
$2512 = 2^4 \times 157$
$2530 = 2 \times 5 \times 11 \times 23$
$2618 = 2 \times 7 \times 11 \times 17$
$2642 = 2 \times 1321$

$3458 = 2 \times 7 \times 13 \times 19$
$3818 = 2 \times 23 \times 83$
$3848 = 2^3 \times 13 \times 37$
$4618 = 2 \times 2309$
$4886 = 2 \times 7 \times 349$
$5372 = 2^2 \times 17 \times 79$
$5978 = 2 \times 7^2 \times 61$
$6002 = 2 \times 3001$
$6008 = 2^3 \times 751$
$7426 = 2 \times 47 \times 79$
$9596 = 2^2 \times 2399$
$9602 = 2 \times 4801$
$10268 = 2^2 \times 17 \times 151$
$10622 = 2 \times 47 \times 113$
$11438 = 2 \times 7 \times 19 \times 43$
$11642 = 2 \times 5821$
$12886 = 2 \times 17 \times 379$
$13148 = 2^2 \times 19 \times 173$
$13562 = 2 \times 6781$
$14198 = 2 \times 31 \times 229$
$14678 = 2 \times 41 \times 179$
$16502 = 2 \times 37 \times 223$
$18908 = 2^2 \times 29 \times 163$
$21368 = 2^3 \times 2671$
$22832 = 2^4 \times 1427$
$23426 = 2 \times 13 \times 17 \times 53$
$23456 = 2^5 \times 733$
$43532 = 2^2 \times 10883$
$54244 = 2^2 \times 71 \times 191$
$63274 = 2 \times 17 \times 1861$