Mots périodiques ou comment projeter tous les restes sur 0 ou 1 (Denise Vella-Chemla, 4.1.2019)

Note : la méthode présentée ci-dessous de recherche de décomposants de Goldbach des nombres doubles de nombres premiers ne permet pas de trouver comme décomposant de Goldbach de n un nombre premier p inférieur à $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ *(on oublie systématiquement les congruences à 0). Par exemple, juste ci-dessous, 3 n'est pas noté comme décomposant de Goldbach de 26 le double de 13 alors qu'il en est un :* $26 = 3 + 23$.

$n = 26$
$n \equiv 2\ (3),\ n \equiv 1\ (5)$
$sol \equiv 1\ (3),\ sol \equiv 2, 3, 4\ (5)$

③ ④② ③

① ①

13 7

$n = 34$
$n \equiv 1\ (3),\ n \equiv 4\ (5)$
$sol \equiv 2\ (3),\ sol \equiv 1, 2, 3\ (5)$

② ③① ② ③

② ② ②

17 11

$n = 38$
$n \equiv 2\ (3),\ n \equiv 3\ (5)$
$sol \equiv 1\ (3),\ sol \equiv 1, 2, 4\ (5)$

④② ①④②

① ① ①

19 7

$n = 46$
$n \equiv 1\ (3),\ n \equiv 1\ (5)$
$sol \equiv 2\ (3),\ sol \equiv 2, 3, 4\ (5)$

③ ④② ③ ④② ③

② ② ② ②

23 17

$n = 58$
$n \equiv 1\ (3),\ n \equiv 3\ (5),\ n \equiv 2\ (7)$
$sol \equiv 2\ (3),\ sol \equiv 1, 2, 4\ (5),\ sol \equiv 1, 3, 4, 5, 6\ (7)$

①⑥④ ⑤③①⑥④ ⑤③

④② ①④② ①④②

② ② ② ② ②

29 17 11

$n = 62$
$n \equiv 2\ (3),\ n \equiv 2\ (5),\ n \equiv 6\ (7)$
$sol \equiv 1\ (3),\ sol \equiv 1, 3, 4\ (5),\ sol \equiv 1, 2, 3, 4, 5\ (7)$

③① ④② ⑤③① ④② ⑤③

①④ ③①④ ③①④ ③

① ① ① ① ①

31 19

$n = 74$
$n \equiv 2\ (3),\ n \equiv 4\ (5),\ n \equiv 4\ (7)$
$sol \equiv 1\ (3),\ sol \equiv 1, 2, 3\ (5),\ n \equiv 1, 2, 3, 5, 6\ (7)$

② ⑤③①⑥ ② ⑤③①⑥ ② ⑤③
② ③① ② ③① ② ③① ② ③
① ① ① ① ① ①
37 31 13

$n = 82$
$n \equiv 1\ (3),\ n \equiv 2\ (5),\ n \equiv 5\ (7)$
$sol \equiv 2\ (3),\ sol \equiv 1, 3, 4\ (5),\ sol \equiv 1, 2, 3, 4, 6\ (7)$

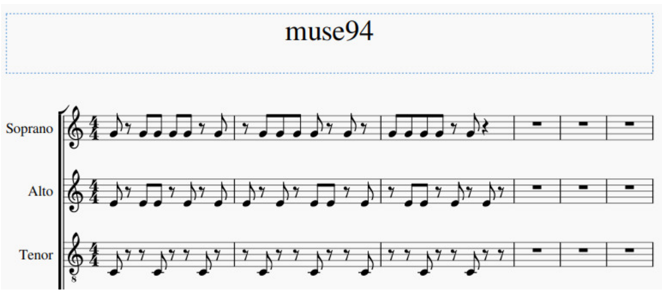
⑥④② ③①⑥④② ③①⑥④② ③
①④ ③①④ ③①④ ③①④ ③
② ② ② ② ② ② ②
41 29 23 11

$n = 86$
$n \equiv 2\ (3),\ n \equiv 1\ (5),\ n \equiv 2\ (7)$
$sol \equiv 1\ (3),\ sol \equiv 2, 3, 4\ (5),\ sol \equiv 1, 3, 4, 5, 6\ (7)$

①⑥④ ⑤③①⑥④ ⑤③①⑥④ ⑤③
③ ④② ③ ④② ③ ④② ③ ④② ③
① ① ① ① ① ① ①
43 19 13

$n = 94$
$n \equiv 1\ (3),\ n \equiv 4\ (5),\ n \equiv 3\ (7)$
$sol \equiv 2\ (3),\ sol \equiv 1, 2, 3\ (5),\ sol \equiv 1, 2, 4, 5, 6\ (7)$

⑤ ①⑥④② ⑤ ①⑥④② ⑤ ①⑥④② ⑤
② ③① ② ③① ② ③① ② ③① ② ③
② ② ② ② ② ② ② ②
47 41 23 11



10111101011110101111010
10110101101011010110101
10010010010010010010010

L'expression informatique de la conjecture de Goldbach est :

> *Soit un ensemble de chaînes booléennes périodiques de périodes des mots de longueur impaire telles que le mot période de chaque chaîne contient exactement 2 lettres 0.*
> *A démontrer : la chaîne conjonction ($\wedge$ logique) de toutes ces chaînes contient une lettre 1 au moins.*

Retrouver les palindromes [1]

On commence par voir si l'idée tient pour des chaînes périodiques petites, de longueur 3 et 5.

Les trois chaînes possibles "à 2 zéros" de longueur 3 sont :

- 100,
- 010,
- 001.

Les 10 chaînes possibles "à 2 zéros" de longueur 5 sont :

- 00111,
- 01011,
- 01101,
- 01110,
- 10011,
- 10101,
- 10110,
- 11001,
- 11010,
- 11100.

Le nombre de chaînes de longueur n est $\dfrac{n(n-1)}{2}$ car le premier 0 a $n-1$ positions possibles dans le mot et qu'une fois sa position fixée, le second 0 a une position possible de moins que le premier zéro, ce qui fait $1+2+\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ possibilités en tout.

Voici les 10 premières combinaisons, de la première chaîne de longueur 3 avec toutes les chaînes possibles de longueur 5. La chaîne résultante est de longueur 15.

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
			$\color{red}{\bullet}$						$\color{blue}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$		
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
						$\color{blue}{\bullet}$			$\color{red}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$		
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\color{blue}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$						$\color{red}{\bullet}$					
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$\color{red}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$									$\color{blue}{\bullet}$		
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\color{blue}{\bullet}$			$\color{red}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$								

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
			$\color{blue}{\bullet}$			$\color{red}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$					
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
			$\color{blue}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$						$\color{red}{\bullet}$		
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
$\color{red}{\bullet}$									$\color{blue}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$		
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$\color{red}{\bullet}$						$\color{blue}{\bullet}$			$\color{blue}{\bullet}$					
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$\color{blue}{\bullet}$						$\color{red}{\bullet}$						$\color{blue}{\bullet}$		

On est tenté d'appeler les lettres rouges "*centres*" des mots auxquels elles appartiennent dans le sens où si on mettait le mot sur un cercle [2] il se lirait identiquement que l'on parcoure le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ou bien dans le sens inverse (sorte de palindrome circulant). Les solutions sont les sommets d'un triangle isocèle porté par le cercle.

1. déjà rencontrés lors de précédentes recherches autour de la conjecture de Goldbach en février 2006, avril et mai 2009 et novembre 2017.

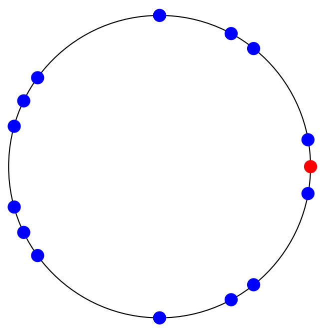
2. Mathématiquement, on appelle *collier* un mot sur un cercle, c'est l'orbite de l'action du groupe cyclique ; on appelle *bracelet* une classe de colliers équivalents par réflexion, le bracelet est l'orbite de l'action du groupe diédral ; l'existence de ces 3 points sommets d'un triangle isocèle sur le cercle se déduit peut-être du théorème de Borsuk-Ulam de partage discret du collier : le *centre* et un point opposé au centre à égale distance des deux points bleus sont antipodaux et existent toujours selon ce théorème.

Cette propriété a pour conséquence (il faudrait le démontrer) qu'il y a toujours une solution de position très basse par rapport à la longueur du mot considéré.

Poursuivons d'un niveau : prenons l'une des chaînes de longueur 15 qu'on avait trouvée (celle en "conjonctant" 001 à 01101) et qui est 001000000001001. C'est une chaîne à 15 caractères. On en fait la conjonction avec une chaîne au hasard de longueur 7 qui contient exactement 2 zéros et qui est 1101110. On obtient une chaîne de longueur 105 ci-dessous. Elle contient 15 solutions indiquées en bleu dont un centre coloré en rouge. La chaîne résultante est effectivement palindrome et se lit indifféremment dans un sens ou l'autre depuis le centre (ou depuis son antipode, indiqué d'un trait rouge entre deux caractères).

On a peut-être enfin trouvé les "rythmes non-rétrogadables" de Messiaen, qu'Alain Connes, Jacques Dixmier et Danye Chéreau évoquent dans leur roman Le Spectre d'Atacama. ([1], [2]).

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
											•		3	•
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
	3	•					9				•		3	•
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
	3	•						15						
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
		•				9					•		3	•
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
				12							•		3	•
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
	3	•						12						•
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
	3	•				9						•	15	



Référence

[1] Alain Connes, Danye Chéreau, Jacques Dixmier, *Le Spectre d'Atacama*, janvier 2018, éditions Odile Jacob.

[2] Alain Connes, *Motivic rhythms*, décembre 2018, https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf.

Annexe 1 : ajout d'un niveau

Pour se convaincre davantage, on reprend la chaîne conjonctive des chaînes de longueurs 3, 5 et 7, qui avait ses 1 aux positions suivantes : 12, 15, 18, 27, 30, 33, 48, 57, 60, 72, 75, 78, 90, 93, 102 (et qui est 000000000001001001000000001001001000000000000001000000001001000000000001001001000000000001001000000001000).

On la "conjoint" avec la chaîne périodique de longueur 1155 et de période 11101101111 choisie au hasard et contenant bien 2 lettres 0.

On obtient une chaîne dont les 0 sont aux positions : 12, 27, 30, 33, 57, 60, 72, 75, 78, 90, 93, 102, 120, 123, 132, 135, 138, 153, 162, 165, 177, 195, 198, 207, 222, 225, 228, 237, 240, 243, 258, 267, 270, 285, 288, 300, 303, 327, 330, 333, 342, 363, 372, 375, 387, 390, 393, 405, 408, 417, 432, 435, 438, 450, 453, 468, 492, 495, 498, 522, 537, 540, 552, 555, 558, 573, 582, 585, 597, 600, 603, 615, 618, 627, 648, 657, 660, 663, 687, 690, 702, 705, 720, 723, 732, 747, 750, 753, 762, 765, 768, 783, 792, 795, 813, 825, 828, 837, 852, 855, 858, 867, 870, 888, 897, 900, 912, 915, 918, 930, 933, 957, 960, 963, 978, 993, 1002, 1017, 1020, 1023, 1035, 1047, 1062, 1065, 1068, 1077, 1080, 1083, 1098, 1110, 1122, 1125, 1128, 1143, 1152.

On écrit les écarts, on note le centre en rouge et son antipode d'un trait entre 2 nombres.

15, 15, 3, 3, 24, 3, 12, 3,3, 12, 3, 9, 18, 3, 9, 3, 3, 15, 9, 3, 12, 18, 3, 9, 15, 3, 3, 9, 3, 3, 15, 9, 3, 15, 3, 12, 3, 24, 3, 3, 9, 21, 9, 3, 12, 3, 3, 12, 3, 9, 15, 3, 3, 12, 3, 15, 24, 3|3, 24, 15, 3, 12, 3, 3, 15, 9, 3, 12, 3, 3, 12, 3, 9, 21, 9, 3, 3, 24, 3, 12, 3, 15, 3, 9, 15, 3, 3, 9, 3, 3, 15, 9, 3, 18, 12, 3, 9, 15, 3, 3, 9, 3, 18, 9, 3, 12, 3, 3, 12, 3, 24, 3, 3, 15, 15, 9, 15, 3, 3, 12, 12, 15, 3, 3, 9, 3, 3, 15, 12, 12, 3, 3, 15, 9.

On a bien la propriété de palindromie autour du centre (ou autour de son antipode).

On doit comprendre qu'en passant du niveau correspondant à un nombre premier au niveau correspondant au nombre premier suivant, on va obtenir une chaîne qui sera la conjonction de 2 chaînes $s1$ et $s2$; l'une, $s1$, est la concaténation de mots palindromes (elle est périodique de période un palindrome) tandis que l'autre, $s2$, est la concaténation de plusieurs occurrences d'un mot contenant 2 zéros (elle est périodique de période un mot contenant 2 zéros).

La possibilité que 2 lettres 1 se trouvent à même position dans les chaînes $s1$ et $s2$ en question est assez hasardeuse et il faut avoir à l'esprit que trouver un décomposant de Goldbach d'un nombre consiste à trouver une occurrence de 2 lettres 1 à même position dans une sous-chaîne quelconque de la chaîne $s1 \wedge s2$ dont il vient d'être question.

On peut cependant vérifier que ces idées sont correctes en comptant le nombre de solutions pour la chaîne calculée ci-dessus : elle contient 136 solutions (les lettres 1 à la même position dans $s1$ et $s2$) pour une longueur de $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$, $\dfrac{136}{1155} = 0.117$ et ce nombre est bien à peu près égal au produit des $\dfrac{p-2}{p}$ qui vaut environ $\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{5}.\dfrac{5}{7}.\dfrac{9}{11} = \dfrac{9}{77} = 0.117$.

On pense que la conjecture de Goldbach est vraie parce que les conjonctions de 1 se trouvent bien réparties autour du cercle, et il y en a toujours au moins une qui est à une position suffisamment petite pour être inférieure à $n/2$ pour un pair donné n.