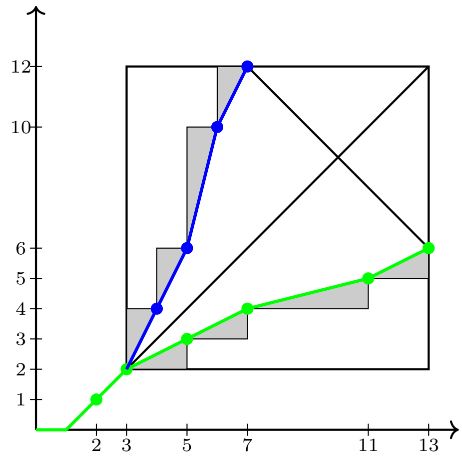
Surface à faire vibrer (Denise Vella-Chemla, 30.8.2018)

Bien que je ne sache pas du tout comment il faut procéder pour trouver les noeuds de vibration, les harmoniques, etc, je propose le carré tronqué comme surface à faire vibrer, peut-être, comme autre manière d'"entendre" les nombres premiers.

Dessin pour $p = 13$:

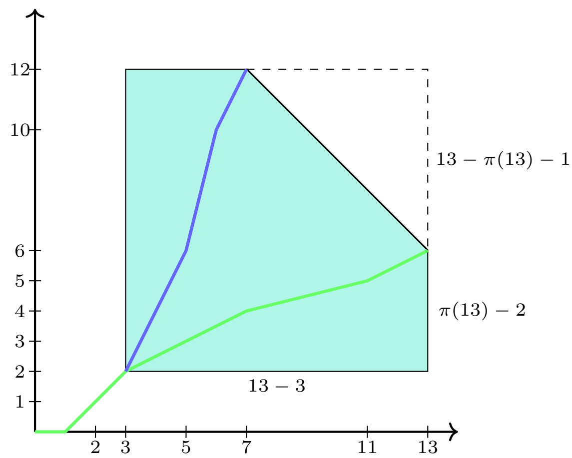


La courbe verte représente la fonction $\pi(x)$ définie par $f(x) = \#\{p_k/p_k \textit{ premier et } p_k \leq x\}$.

La courbe bleue est symétrique de $\pi(x)$ par rapport à la diagonale.

La taille totale des petits triangles rectangles de côtés adjacents horizontaux est $(p_{max} - 3)/2$, là 5.

On aimerait faire vibrer la surface "carré tronqué" colorée en bleu pâle ci-dessous. Les mesures sur les côtés du carré tronqué permettent de calculer la taille des surfaces des différents polygones pour un nombre premier p_{max} donné.

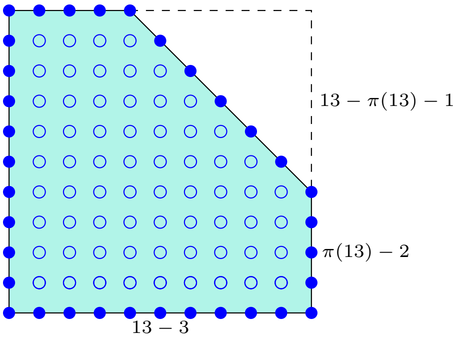


La formule de calcul de l'aire de la surface du carré tronqué donne (on la calcule pour le cas présenté $p_k = 13$) :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 - \frac{1}{2}(x - (\pi(x)+1))^2 \quad &= \frac{1}{2}x^2 - \pi(x)(1-x) - \frac{1}{2}\pi(x)^2 - 5x + \frac{17}{2} \\ &= 82\end{aligned}$$

On peut aussi vérifier que cette formule est correcte en calculant également l'aire de la surface grâce à la formule fourni par le théorème de Pick (*Ext* est le nombre de points entiers du pourtour de la surface tandis que Int est le nombre de points entiers à l'intérieur de la surface) :

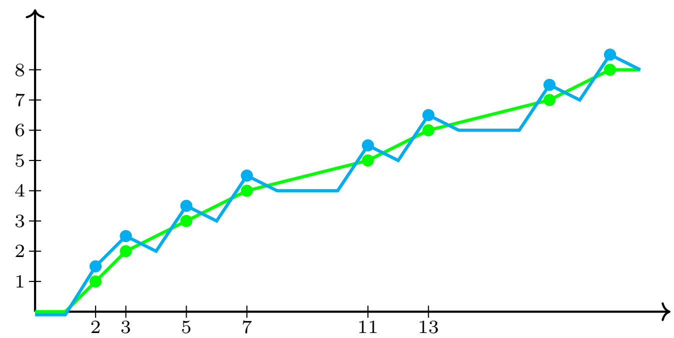
$$\begin{aligned}
Ext &= 34\\
Int &= 66\\
Aire &= Int + \frac{1}{2}Ext - 1\\
&= 66 + 17 - 1\\
&= 82
\end{aligned}$$



Petit memo (Denise Vella-Chemla, 12.09.2018)

Riemann ne compte pas les premiers comme “habituellement”, il ajoute 0.5 à la fonction de comptage lors du passage sur un nombre premier ; on compare dans le tableau ci-dessous la fonction $\pi(x)$ (de couleur verte), celle proposée dans l'article fondateur de Riemann qu'on nomme $\pi_{BR}(x)$ (de couleur cyan), et les valeurs des aires sous les courbes de ces deux fonctions.

x	$\pi(x)$	$\pi_{BR}(x)$	$F1(x) = Aire\ sous\ \pi(x)$	$F2(x) = Aire\ sous\ \pi_{BR}(x)$	$(F1(x+1)+F1(x-1))/2$	$(F2(x+1)+F2(x-1))/2$
2	1	1.5	0.5	0.75	1	1.375
3	2	2.5	2	2.75	2.25	2.875
4	2	2	4	5	4	4.25
5	3	3.5	6	7.75	6.5	8
6	3	3	9	11	9	11.25
7	4	4.5	12	14.75	12.5	15
8	4	4	16	19	16	18.875
9	4	4	20	23	20	23
10	4	4	24	27	24	27.375
11	5	5.5	28	31.75	27.5	32
12	5	5	33	37	33	37.25
13	6	6.5	38	42.75	38.5	43
14	6	6	44	49	44	48.875
15	6	6	50	55	50	55
16	6	6	56	61	56	61.375
17	7	7.5	62	67.75	62.5	68
18	7	7	69	75	69	75.25
19	8	8.5	76	82.75	76.5	83
20	8	8	84	91		



On constate que pour les premiers, avec la fonction de comptage proposée dans l'article de Riemann, la différence des aires sous la courbe de leur succ et de leur prec vaut le double de leur rang.

$$\forall p_k\ premier, Aire_{BR}(p_k+1) - Aire_{BR}(p_k-1) = 2k$$

On constate également qu'avec la fonction $\pi(x)$ telle qu'elle est habituellement définie, la moyenne des aires sous la courbe du succ et du prec d'un nombre (à part pour les nombres premiers 2 et 3) a toujours pour partie fractionnaire 0.5.