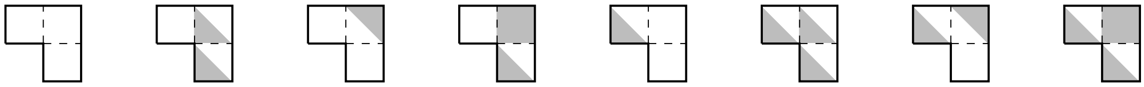
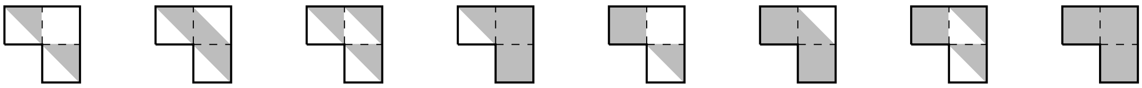
Espace des nombres premiers et pavage apériodique du plan par des triminos bicolores (Denise Vella-Chemla, 22.5.2017)

On voudrait ici associer à un ensemble de règles de réécriture qu'on avait mises au jour dans le cadre de recherches d'une démonstration de la conjecture de Goldbach un pavage du plan euclidien par des triminos bicolores.

Voici les triminos dont on dispose, au nombre de 16.

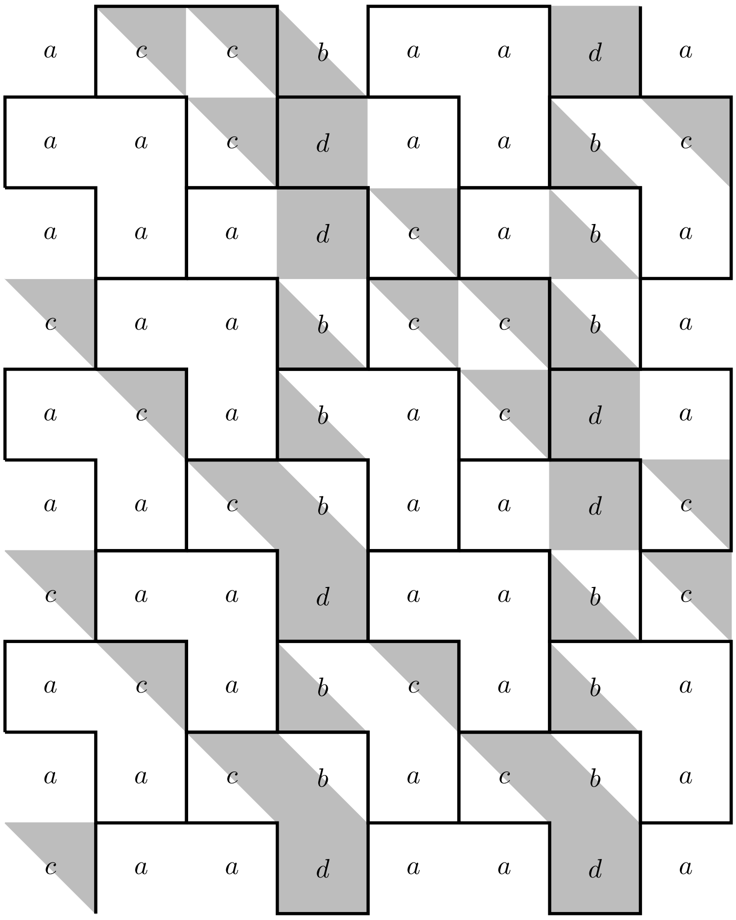


$aa \to a$ $ab \to b$ $ac \to a$ $ad \to b$ $ba \to a$ $bb \to b$ $bc \to a$ $bd \to b$



$ca \to c$ $cb \to d$ $cc \to c$ $cd \to d$ $da \to c$ $db \to d$ $dc \to c$ $dd \to d$

Voici un pavage du plan à l'aide de ces triminos.



Les couleurs sont à comparer aux couleurs associées aux décompositions des nombres pairs comme sommes de deux nombres impairs comme présenté sur le schéma ci-après :

- une décomposition de la forme *premier* + *premier* (lettre a) est colorée en blanc ;
- une décomposition de la forme *composé* + *premier* (lettre b) est colorée en gris au sud-ouest et blanc au nord-est ;
- une décomposition de la forme *premier* + *composé* (lettre c) est colorée en blanc au sud-ouest et gris au nord-est ;

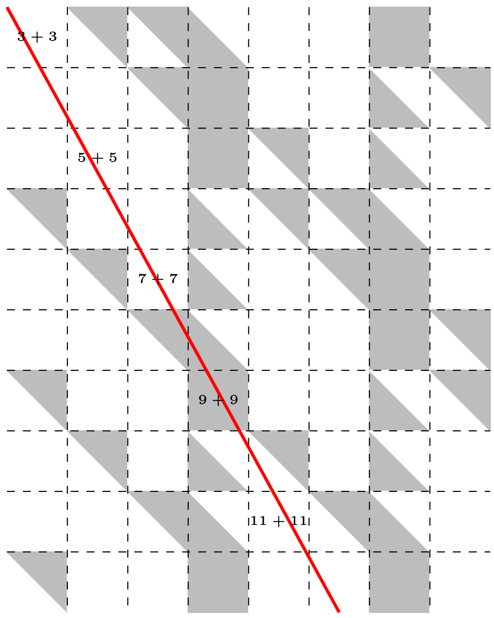
- et enfin, une décomposition de la forme *composé* + *composé* (lettre d) est colorée en gris.

$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$

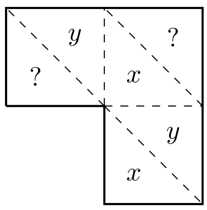
Les couleurs des triminos, qu'on appelait les 16 règles, sont motivées par toutes les implications logiques qui font que si $n = x_1 + y_1 = (x_1+2) + (y_2-2)$ alors $n+2 = (x_1+2)+y_1$. Cela correspond au fait que la couleur du carré en bas à droite de chaque trimino est complètement déterminée par les couleurs des deux carrés en haut du trimino[1].

On peut lire les décompositions triviales de Goldbach de la forme $2p = p + p$ sur une droite de coefficient directeur -2.

[1]Dit autrement, la couleur d de la décomposition $9+15$ se déduit des couleurs c et b des décompositions $7+15$ et $9+13$ en prenant la "composante gauche" de la couleur de $9+13$ (le gris) et la "composante droite" de la couleur de $7+15$ (le gris aussi).

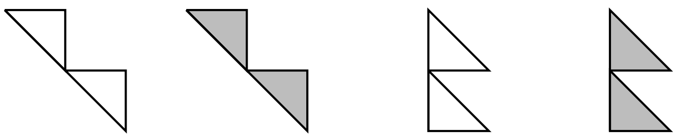


On peut ajouter que tous les triminos, abstraction faite de la bicoloration sont en fait d'une seule forme et leur bicoloration est telle que la couleur x est la même aux 2 endroits indiqués et la couleur y est la même aux deux autres endroits indiqués sur la figure ci-après. Les points d'interrogation dans les autres petits triangles du trimino indiquent que les contraintes portant sur les couleurs en question ne sont pas associées au trimino considéré. Il faut que toutes les contraintes des triminos soient respectées lorsqu'on on décale les bordures des triminos des 3 seules façons possible, la bicoloration restant fixe : prenons l'un des 3 sous-carrés des triminos, par exemple celui en haut à gauche ; selon le premier choix de bordure, il sera effectivement en haut à gauche du trimino qui le contient, selon le deuxième choix de bordure, il sera en haut à droite et selon le troisième choix de bordure, il sera en bas à droite.



Les seuls pavages qui nous intéressent sont ceux dans lesquels tous les triminos sont dans l'orientation qu'on a proposée (on ne pave pas en mettant les deux sous-carrés en bas par exemple). Cela oblige à paver "en diagonale".

Dans la mesure où on peut paver le plan avec des tuiles pouvant être constituées de plusieurs morceaux [2], le problème peut être simpifié en n'ayant à sa disposition que 4 tuiles de 2 formes différentes, chacune des deux couleurs possibles et qui contraindraient le pavage aux contraintes sur x et y vues ci-dessus. Les voici :



Bibliographie

[1] D. Vella-Chemla, *Modéliser*, 31.10.2015, http://denise.vella.chemla.free.fr/champ-de-lettres.pdf.

[2] A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Dunod, 1990.

[3] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman and company, New York, 1987.

[2] tuiles qui ne sont pas des disques topologiques ?