1 Les deux partages de décomposants les plus chouettes qu'il m'ait été donné de voir

1.1 122 et 1802

Voici les décompositions de 122.
122 = 13+109
122 = 19+103
122 = 43+79
122 = 61+61

Voici les décompositions de 1802.
1802 = 13+1789
1802 = 19+1783
1802 = 43+1759
1802 = 61+1741
1802 = 79+1723
1802 = 103+1699
1802 = 109+1693
1802 = 139+1663
1802 = 181+1621
1802 = 193+1609
1802 = 223+1579
1802 = 271+1531
1802 = 313+1489
1802 = 331+1471
1802 = 349+1453
1802 = 373+1429
1802 = 379+1423
1802 = 421+1381
1802 = 499+1303
1802 = 523+1279
1802 = 571+1231
1802 = 601+1201
1802 = 631+1171
1802 = 673+1129
1802 = 709+1093
1802 = 733+1069
1802 = 739+1063
1802 = 751+1051
1802 = 769+1033
1802 = 811+991
1802 = 883+919

On voit que l'ensemble des nombres premiers décomposants de 122 est inclus dans l'ensemble des nombres premiers décomposants de 1802.

Ecrivons 122, 1802, et leurs décomposants communs en écriture par les restes selon la base (2,3,5,7,11).

122	*a pour écriture*	$0-2-2-3-1$.
1802	*a pour écriture*	$0-2-2-3-9$.
13	*a pour écriture*	$1-1-3-6-2$.
19	*a pour écriture*	$1-1-4-5-8$.
43	*a pour écriture*	$1-1-3-1-10$.
61	*a pour écriture*	$1-1-1-5-6$.
79	*a pour écriture*	$1-1-4-2-2$.
103	*a pour écriture*	$1-1-2-5-4$.
109	*a pour écriture*	$1-1-4-4-10$.

La différence de 1802 et 122 est 1680 qui est divisible par $2 \times 3 \times 5 \times 7$, la quatrième primorielle[1].

1.2 Toujours plus fort (!) : les décompositions de l'Univers mathématique de Davis et Hersh[2]

Voici les premières[3] décompositions des nombres de 20902 à 20924.

$$\begin{array}{lll}
20902 & = 3 & +20899 \\
20904 & = 5 & +20890 \\
20906 & = 3 & +20903 \\
20908 & = 5 & +20903 \\
20910 & = 7 & +20903 \\
20912 & = 13 & +20899 \\
20914 & = 11 & +20903 \\
20916 & = 13 & +20903 \\
20918 & = 19 & +20899 \\
20920 & = 17 & +20903 \\
20922 & = 19 & +20903 \\
20924 & = 3 & +20921
\end{array}$$

Voici les premières décompositions des nombres de 20962 à 20984.

$$\begin{array}{lll}
20962 & = 3 & +20959 \\
20964 & = 5 & +20959 \\
20966 & = 3 & +20963 \\
20968 & = 5 & +20963 \\
20970 & = 7 & +20963 \\
20972 & = 13 & +20959 \\
20974 & = 11 & +20963 \\
20976 & = 13 & +20963 \\
20978 & = 19 & +20959 \\
20980 & = 17 & +20963 \\
20982 & = 19 & +20963 \\
20984 & = 3 & +20981
\end{array}$$

[1] J'ai vu une notation je ne sais plus où pour la primorielle, il faut utiliser le dièse, en l'occurrence #7.

[2] Bibliographie : P.J. Davis, R.Hersh, *l'Univers mathématique*, Ed. Gauthier-Villars, 1985

[3] Celles faisant intervenir le nombre premier le plus petit possible étant donné un nombre pair.

Dingue !!!
Elles font intervenir les mêmes nombres premiers dans le même ordre !!!
Remarquons que ces deux suites de nombres pairs sont “écartées” de 60, multiple de #5.
Observons les écritures par les restes.
Là, il faut s’arracher un peu les yeux au niveau de la lisibilité : j’ai mis, entre parenthèses dans l’écriture par les restes et pour un reste donné, le nombre premier que ce reste fait éliminer (parce que ce nombre premier appartient à la classe d’équivalence correspondante).

D’abord, voici la base des premiers, jusqu’à 149, le plus grand premier inférieur à la racine de 20984.
(2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,
109,113,127,131,137,139,149).

Voici les écritures par les restes de la première série de nombres.
20902 : plus petit décomposant 3
0-1-2-0-2-11-9-2-18-22-8-34-33-4-34-20-16-40-65-28-24-46-69-76-47-96-96-37-83-110-
74-73-78-52

20904 : plus petit décomposant 5
0-0(3)-4-2-4-0-11-4-20-24-10-36-35-6-36-22-18-42-0-30-26-48-71-78-49-98-98-39-85-
112-76-75-80-54

20906 : plus petit décomposant 3
0-2-1-4-6-2-13-6-22-26-12-1-37-8-38-24-20-44-2-32-28-50-73-80-51-100-100-41-87-
1-78-77-82-56

20908 : plus petit décomposant 5
0-1-3(3)-6-8-4-15-8-1-28-14-3-39-10-40-26-22-46-4-34-30-52-75-82-53-1-102-43-89-
3-80-79-84-58

20910 : plus petit décomposant 7
0-0(3)-0(5)-1-10-6-0-10-3-1-16-5-0-12-42-28-24-48-6-36-32-54-77-84-55-3-1-45-91-
5-82-81-86-60

20912 : plus petit décomposant 13
0-2(5,11)-2(7)-3(3)-1-8-2-12-5-3-18-7-2-14-44-30-26-50-8-38-34-56-79-86-57-5-3-47-
93-7-84-83-88-62

20914 : plus petit décomposant 11
0-1(7)-4-5(5)-3(3)-10-4-14-7-5-20-9-4-16-46-32-28-52-10-40-36-58-81-88-59-7-5-49-
95-9-86-85-90-64

20916 : plus petit décomposant 13
0-0(3)-1(11)-0(7)-5(5)-12-6-16-9-7-22-11-6-18-1-34-30-54-12-42-38-60-0-1-61-9-7-
51-97-11-88-87-92-66

20918 : plus petit décomposant 19
0-2(5,11,17)-3(3,13)-2-7(7)-1-8-18-11-9-24-13-8-20-3-36-32-56-14-44-40-62-2-3-63-11-9-53-99-13-90-89-94-68

20920 : plus petit décomposant 17
0-1(7,13)-0(5)-4(11)-9-3(3)-10-1-13-11-26-15-10-22-5-38-34-58-16-46-42-64-4-5-65-13-11-55-101-15-92-91-96-70

20922 : plus petit décomposant 19
0-0(3)-2(7,17)-6(13)-0(11)-5(5)-12-3-15-13-28-17-12-24-7-40-36-60-18-48-44-66-6-7-67-15-13-57-103-17-94-93-98-72

20924 : plus petit décomposant 3
0-2-4-1-2-7-14-5-17-15-30-19-14-26-9-42-38-1-20-50-46-68-8-9-69-17-15-59-105-19-96-95-100-74

Et voici les écriture par les restes de la deuxième série de nombres.
20962 : plus petit décomposant 3
0-1-2-4-7-6-1-5-9-24-6-20-11-21-0-27-17-39-58-17-11-27-46-47-10-55-53-97-34-57-7-2-1-112

20964 : plus petit décomposant 5
0-0(3)-4-6-9-8-3-7-11-26-8-22-13-23-2-29-19-41-60-19-13-29-48-49-12-57-55-99-36-59-9-4-3-114

20966 : plus petit décomposant 3
0-2-1-1-0-10-5-9-13-28-10-24-15-25-4-31-21-43-62-21-15-31-50-51-14-59-57-101-38-61-11-6-5-116

20968 : plus petit décomposant 5
0-1-3(3)-3-2-12-7-11-15-1-12-26-17-27-6-33-23-45-64-23-17-33-52-53-16-61-59-103-40-63-13-8-7-118

20970 : plus petit décomposant 7
0-0(3)-0(5)-5-4-1-9-13-17-3-14-28-19-29-8-35-25-47-66-25-19-35-54-55-18-63-61-105-42-65-15-10-9-120

20972 : plus petit décomposant 13
0-2(5,11)-2(7)-0-6-3(3)-11-15-19-5-16-30-21-31-10-37-27-49-1-27-21-37-56-57-20-65-63-0-44-67-17-12-11-122

20974 : plus petit décomposant 11
0-1(7)-4-2-8-5(5)-13-17-21-7-18-32-23-33-12-39-29-51-3(3)-29-23-39-58-59-22-67-65-2-46-69-19-14-13-124

20976 : plus petit décomposant 13
0-0(3)-1(11)-4-10-7(7)-15-0-0-9-20-34-25-35-14-41-31-53-5(5)-31-25-41-60-61-24-69-67-4-48-71-21-16-15-126

20978 : plus petit décomposant 19
0-2(5,11,17)-3(3,13)-6-1-9-0-2-2-11-22-36-27-37-16-43-33-55-7(7)-33-27-43-62-63-26-71-69-6-50-73-23-18-17-128

20980 : plus petit décomposant 17
0-1(7,13)-0(5)-1-3(3)-11(11)-2-4-4-13-24-1-29-39-18-45-35-57-9-35-29-45-64-65-28-73-71-8-52-75-25-20-19-130

20982 : plus petit décomposant 19
0-0(3)-2(7,17)-3-5(5)-0(13)-4-6-6-15-26-3-31-41-20-47-37-59-11(11)-37-31-47-66-67-30-75-73-10-54-77-27-22-21-132

20984 : plus petit décomposant 3
0-2-4-5-7-2-6-8-8-17-28-5-33-0-22-49-39-0-13-39-33-49-68-69-32-77-75-12-56-79-29-24-23-134

On voit que les écritures se correspondent terme à terme dans les deux séries seulement selon les trois premières coordonnées des n-uplets (Donc vous aviez raison au sujet d'un texte que je vous avais fait parvenir en fin d'été 2007 sur le fait que la notion d'ordre (je voulais réordonner les entiers sous prétexte que j'avais lu le bouquin de Denis Guedj sur Cantor) n'a pas d'importance ici car on n'a pas partage entre des nombres qui auraient des écritures qui seraient ce que j'avais appelé "préfixes propres" les unes des autres, au sens langagier monoïdal où on peut l'entendre (sic !), c'est à dire une suite de lettres qui commence une autre suite de lettres).

On constate également que les nombres premiers qui ne peuvent participer à une décomposition Goldbach, sous prétexte qu'ils partagent une coordonnée avec $2x$ sont éliminés par des voies totalement différentes dans les deux séries et pourtant, de façon totalement déterministe, même si de façon totalement chaotique, on se retrouve avec les mêmes décomposants dans le même ordre, et ça, je trouve que c'est franchement jubilatoire de le savoir !

2 Probabilités et Identité de Poincaré

Je regrette infiniment de ne pas réussir à croire que ces exemples sont le résultat de bêtes coïncidences.
Donc, j'essaie de réfléchir en terme de probabilités.

Admettons que j'aie à tirer au hasard deux couples dans un ensemble de couples dont les premières coordonnées varient de 0 à 2 (au hasard, histoire de bien visualiser la congruence mod 3) et dont la deuxième coordonnée varie de 0 à 4 (histoire cette fois-ci de bien visualiser la congruence à 5).

Chacun des deux couples peut être l'un des 15 couples différents possibles :
(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4), (1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4), (2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4).

Quelles sont mes chances de tirer deux couples qui partagent au moins une coordonnée (i.e. le premier couple s'appelant (x_1, y_1) et le deuxième s'appelant

(y_1, y_2), quelle est la probabilité que $(x_1 = x_2) \vee (y_1 = y_2))$?

J'applique l'identité de Poincaré[4] et je trouve $\frac{7}{15}$, c'est à dire $\frac{p+q-1}{pq}$.

Je recommence pour des triplets, dont la coordonnée cette fois varie de 0 à 6 (pour la congruence selon 7).
Je réapplique l'identité de Poincaré et je calcule mes chances...
Cette fois-ci, j'obtiens $\frac{57}{105}$, selon la formule $\frac{pq+pr+qr-p-q-r+1}{pqr}$.

Par programme, j'ai calculé la valeur de la probabilité pour tous les nombres premiers jusqu'à 10^9. J'ai trouvé 0.925046.

On dirait que la probabilité tend vers 1 mais sans jamais l'atteindre... Est-ce que pour autant cela veut dire qu'on est obligé de toujours trouver un nombre premier p qui ne partage aucune de ses coordonnées avec $2x$?...

En fait, si on voulait vraiment être en cohérence avec les exemples qui ont été vus dans la première section, et exprimer la notion que j'appelle "partage des décomposants de Goldbach", il faudrait être capable d'exprimer en termes de probabilités le fait que deux nombres, non pas sont congrus entre eux modulo un certain nombre premier, mais ne sont pas tous les deux congrus à ce même premier selon d'autres premiers, en quelque sorte être capable d'exprimer comment deux objets ne sont pas égaux à un même troisième en se moquant de la relation qui les lie entre eux, car c'est là alors qu'ils ont des chances de partager des décomposants Goldbach...

[4] P(A $\bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$