

## Conjecture de Goldbach et entropie, Denise Vella-Chemla et Jacques Chemla (programmation en février et écriture en septembre 2025)

Pour vérifier une formule écrite à la volée au tableau et expliquée par Alain Connes lors d'une conférence <sup>1</sup>, j'avais d'abord écrit ce minuscule programme :

```
print('= 101.5, y = 103.5')
x = 101.5
y = 103.5
print('formule entropie = ',alpha*log(x)+(1-alpha)*log(y)
      -alpha*log(alpha)-(1-alpha)*log(1-alpha))
print('log de la somme = ',log(x+y))
print('= 10001.5, y = 10003.5')
x = 10001.5
y = 10003.5
print('formule entropie = ',alpha*log(x)+(1-alpha)*log(y)
      -alpha*log(alpha)-(1-alpha)*log(1-alpha))
print('log de la somme = ',log(x+y))
print('= 1000001.5, y = 1000003.5')
x = 1000001.5
y = 1000003.5
print('formule entropie = ',alpha*log(x)+(1-alpha)*log(y)
      -alpha*log(alpha)-(1-alpha)*log(1-alpha))
print('log de la somme = ',log(x+y))
```

L'idée ici est de calculer une somme à partir du log et du max. Comme la décomposition d'un nombre pair en somme de deux nombres premiers est basée sur un calcul de somme, j'avais alors pensé à utiliser cette idée pour calculer les décomposants de Goldbach d'un nombre pair à la manière dont cela est effectué dans le programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np

P = np.array([3,5,7,11,13])
precision = 51
aallpphhaa = np.linspace(0, 1, precision)[1:precision-1]
# exclut les extremités 0 et 1 de l intervalle unite
S = -aallpphhaa*np.log(aallpphhaa)-(1-aallpphhaa)*np.log(1-aallpphhaa)
w = np.exp(S)
M = np.array([[w[k]*(p**aallpphhaa[k])*(q**(1-aallpphhaa[k])) for p in P for q in P]
for k in range(len(aallpphhaa))])
k = np.argmax(M, axis=0)
plt.plot(M)
plt.scatter(k, M[k, np.arange(M.shape[1])], c='red')
plt.xlabel('utiliser l entropie pour calculer des sommes ')
plt.xticks([])
plt.yticks(range(4,26,2))
plt.grid()
plt.show()
```

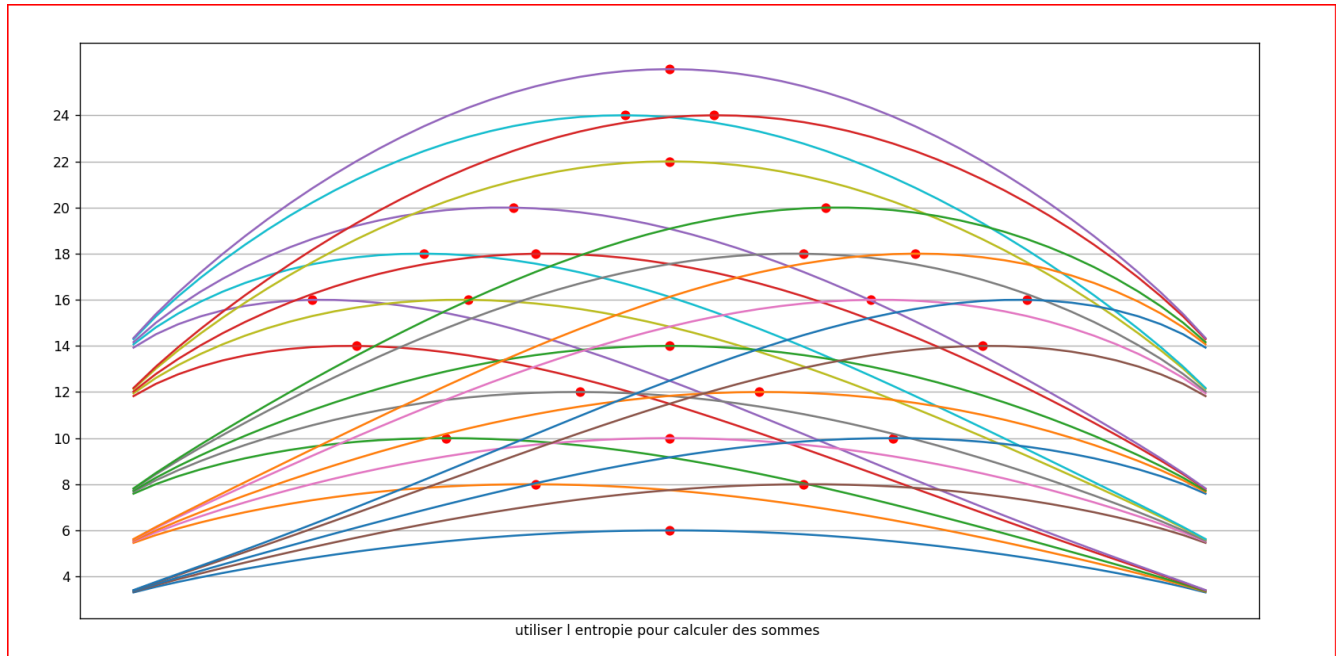
---

<sup>1</sup>vers la minute 1h16' de cette conférence *Knots, primes and the scaling site (partie 2)* donnée dans le cadre de la conférence *Toposes in Mondovi* du 3 au 11 septembre 2024 :

<https://www.youtube-nocookie.com/embed/XPVfElqM264>

ce qui m'avait permis d'obtenir le graphique ci-dessous, qui fournit bien les décompositions de Goldbach obtenables avec les seuls nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13 ("lire" les décompositions de Goldbach sur le graphique de bas en haut) :

$$\begin{aligned} 3 + 3 &= 6, \\ 3 + 5 &= 5 + 3 = 8, \\ 3 + 7 &= 5 + 5 = 7 + 3 = 10, \\ \text{etc..} \end{aligned}$$



L'idée est fréquente en algèbre et en informatique de voir ce qui se passe lorsqu'on utilise telle ou telle opération plutôt que telle ou telle autre. En informatique, on essaie de limiter au maximum les composants ; en algèbre, on essaie de généraliser toujours davantage. Les algèbres max-plus, min-plus, sont à la base du domaine des mathématiques tropicales (voir les travaux d'Imre Simon, d'Ilia Itemberg, de Gondran et Minoux, de Marianne Akian et Stéphane Gaubert, de Nicolas Bacaër, etc.).

Jacques Chemla <sup>2</sup> a écrit les éléments explicatifs ci-dessous, et il a reprogrammé plus proprement mon chouette dessin pour qu'il "aille plus loin".

## 1. Logarithme d'une somme

La fonction logarithme satisfait l'équation fonctionnelle)

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

<sup>2</sup>mon époux.

Le logarithme d'un *produit* s'exprime ainsi en fonction des logarithmes des opérandes (leur somme).

Le logarithme d'une *somme* peut aussi s'exprimer en fonction des logarithmes des opérandes, suivant l'exposé d'Alain Connes :

$$\log(x + y) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}.$$

$S(\alpha)$  désigne l'entropie de Shannon de la partition  $(\alpha, 1 - \alpha)$  de l'intervalle unité  $[0, 1]$  :

$$S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha).$$

Lorsque  $\alpha = 0$  ou  $1$ , on considère le comportement à la limite, de sorte que  $S(0) = S(1) = 0$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ .

## 2. Démonstration

Pour  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $0 < \alpha < 1$ , on a

$$\begin{aligned} \log(x + y) &= \log \left( \alpha \frac{x}{\alpha} + (1 - \alpha) \frac{y}{1 - \alpha} \right) \\ &\geq \alpha \log \left( \frac{x}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \log \left( \frac{y}{1 - \alpha} \right) \\ &= \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha). \end{aligned}$$

L'inégalité introduite à la deuxième étape résulte de la concavité de la fonction logarithme.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \log(x + y) &\geq \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ \iff \log(x + y) &\geq \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $\log(x + y)$  est bien atteinte par le terme de droite pour une valeur de  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

Pour  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  fixés, on note  $f(\alpha) = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha)$  le terme à maximiser. Sa dérivée vaut

$$f'(\alpha) = \log x - \log y - \log \alpha + \log(1 - \alpha) = -\log \left( \frac{y}{x} \right) + \log \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right).$$

Elle s'annule lorsque

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\alpha} - 1 \iff \alpha = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} = \frac{x}{x + y}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f \left( \frac{x}{x + y} \right) \\ &= \frac{x}{x + y} \log x + \frac{y}{x + y} \log y - \frac{x}{x + y} \log \left( \frac{x}{x + y} \right) - \frac{y}{x + y} \log \left( \frac{y}{x + y} \right) \\ &= \frac{x}{x + y} \log x + \frac{y}{x + y} \log y - \frac{x}{x + y} (\log x - \log(x + y)) - \frac{y}{x + y} (\log y - \log(x + y)) \\ &= \log(x + y). \end{aligned}$$

D'où

$$\log(x + y) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \},$$

$$\frac{x}{x + y} = \operatorname{argmax}_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}.$$

### 3. $+$ = $(\times, \max)$

En passant à l'exponentielle, on voit qu'il est possible de définir l'addition en fonction de la multiplication et du max :

$$\begin{aligned} x + y &= e^{\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}} \\ &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ e^{\alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha)} \} \\ &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ e^{S(\alpha)} x^\alpha y^{1-\alpha} \}. \end{aligned}$$

La deuxième étape est justifiée par le fait que l'exponentielle est une fonction croissante.

On obtient ainsi une formule de type Witt pour définir l'addition, formule qui intervient dans la construction de l'anneau de Witt), dans le cadre des semi-anneaux parfaits de caractéristique 1 (voir [1]).

### 6. Conjecture de Goldbach

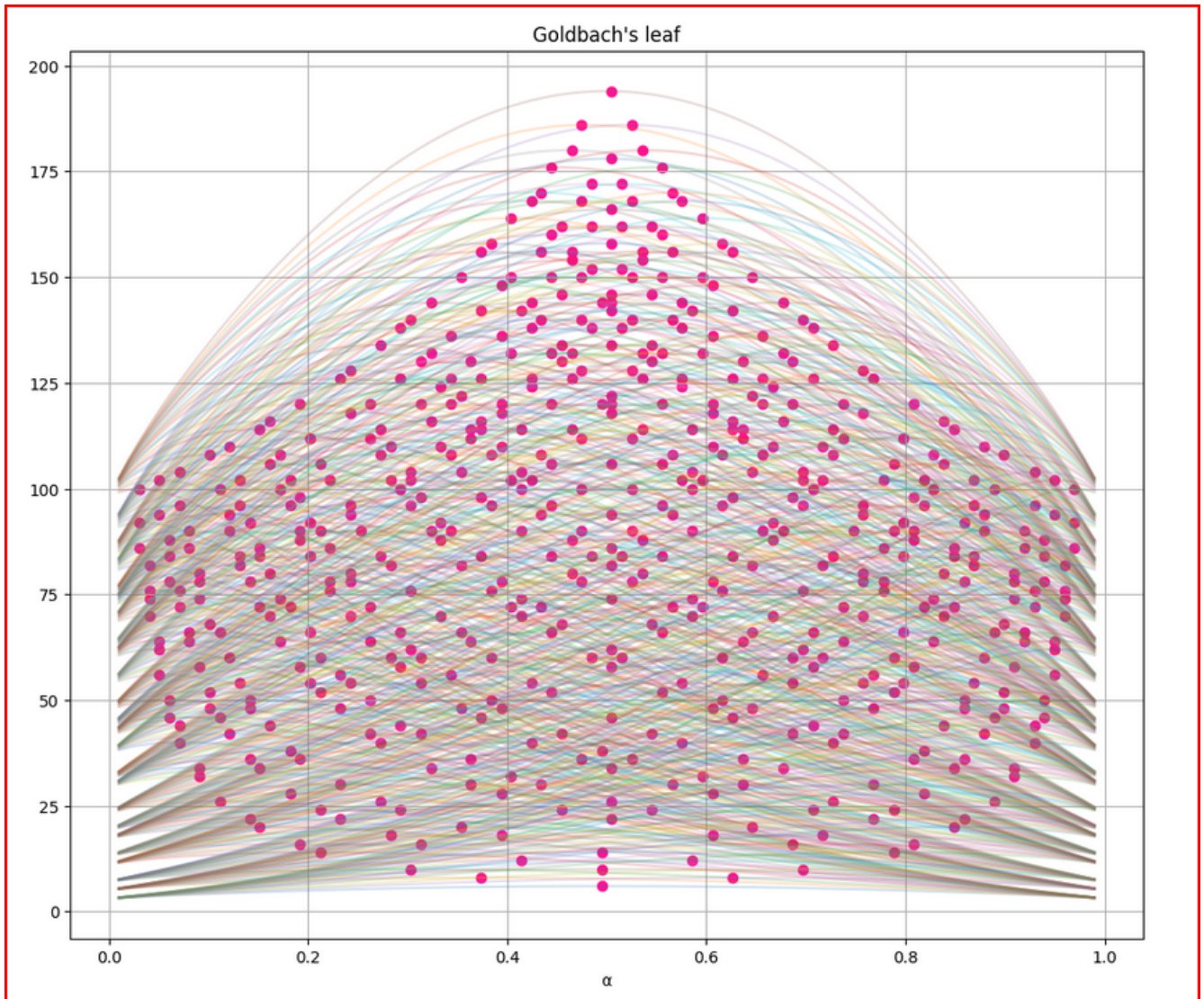
En notant  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers, et  $\mathbb{N}_{\geq 2}$  celui des entiers  $\geq 2$ , on peut reformuler la conjecture de Goldbach sans utiliser l'addition :

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1, p, q \in \mathbb{P}} \{ e^{S(\alpha)} p^\alpha q^{1-\alpha} \} \supseteq 2\mathbb{N}_{\geq 2}.$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import argmax, array, exp, linspace, log, max, newaxis

P = array([3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
73, 79, 83, 89, 97])
P = array([3, 5, 7])
alfa = linspace(0, 1, 100)[1:-1]  exclude 0/1 bounds from unit interval
w = exp(-alfa*log(alfa)-(1-alfa)*log(1-alfa))
p, q = P**alfa[:,newaxis], P**(1-alfa)[: ,newaxis]
M = w[:,newaxis,newaxis] * p[:, :,newaxis] * q[:,newaxis,:]
m = argmax(M, axis=0)

axs = plt.figure(figsize=(12, 10)).subplots()
x, y = alfa, M.reshape((len(alfa), -1))
plt.plot(x, y, alpha=0.2)
k = m.reshape((y.shape[1],))
ky = y[k, range(len(k))]
plt.scatter(x=x[k], y=ky, c='deeppink')
plt.xlabel('alfa')
plt.title("Goldbach's leaf")
plt.grid()
plt.show()
```



## Référence

[1] Alain Connes, *The Witt construction in characteristic one and quantization*, Noncommutative geometry and global analysis, vol. 546, pp. 83–113, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. [lien de la publication sur le site d'Alain Connes \(arxiv:1009.1769\)](#)