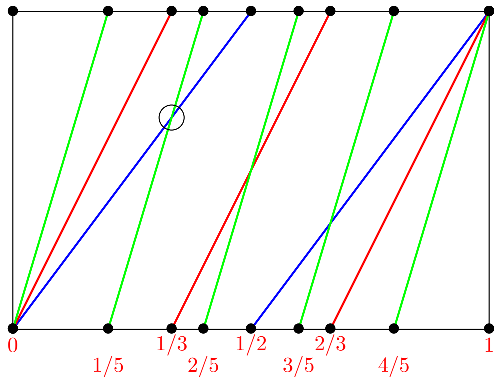
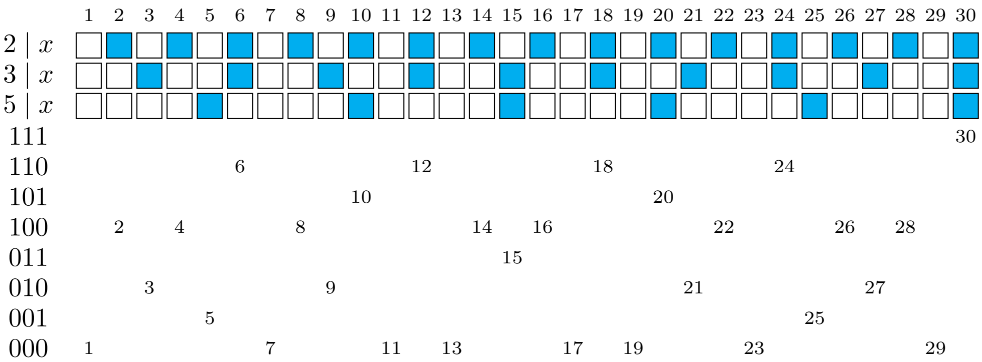
Relation surprenante (Denise Vella-Chemla, 17.3.2018)

On cherchait à mettre en relation deux représentations auxquelles on s'était intéressé. On ne comprenait pas pourquoi le nombre d'intersections sur le tore (représentation du haut) ne permettait pas de compter les cardinaux des ensembles de nombres de mêmes caractères de divisibilité (représentation du bas). L'intersection entourée représente les nombres qui sont à la fois des $2x + a \ (mod\ 1)$ et des $5x + b \ (mod\ 1)$ avec $0 \leqslant a, b \leqslant 1$ et de fil en aiguille, ces réflexions nous ont amené à la définition et à la conjecture présentées après les représentations à mettre en regard.





Définition : on appelle *nombres orthogonaux* des nombres qui voient leurs caractères de divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à la racine du plus grand d'entre eux être opposés. Sur la seconde représentation ci-dessus, les nombres de l'ensemble $\{6, 12, 18, 24\}$ (représentés par les 3 booléens 110) sont orthogonaux un à un aux nombres de l'ensemble $\{5, 25\}$ (représentés par les 3 booléens 001).

Comme autre exemple, 963 et 1000 sont *des nombres orthogonaux* car pour tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{1000}$ (= 31, ...), les relations entre les nombres premiers en question et chacun des 2 nombres 963 et 1000 sont opposées : 2 ne divise pas 963 tandis qu'il divise 1000 ; il en est de même pour tous les nombres premiers compris entre 5 et 31. Inversement, 3 divise 963 et ne divise pas 1000.

On doit noter qu'*orthogonaux* ne signifie pas *premiers entre eux* : $992 = 2^5.31$ et $995 = 5.199$ sont *premiers entre eux* mais ne sont pas *orthogonaux* car 3 ne les divise ni l'un ni l'autre.

On conjecture et on vérifie par programme que la différence de deux nombres *orthogonaux* est soit 1 soit un nombre premier.

Je n'ai pas suffisamment lu le récent livre de Laurent Lafforgue *Géométrie plane et algèbre* aux éditions Hermann mais le parcourir m'a sûrement donné une petite impulsion, à la recherche de ces liens entre nombres et géométrie.