Orthogonalité (Denise Vella-Chemla, 18.3.2018)

On associe à chaque nombre entier naturel x une chaîne infinie m de sous-chaînes de caractères (chaque sous-chaîne est indicée par un nombre premier parmi l'infinité des nombres premiers). La i-ème sous-chaîne de m est égale au reste de la division euclidienne de x par le i-ème nombre premier.

Voici les premières lettres des chaînes de caractères associées aux nombres de 1 à 100 (ε est le mot vide). Il faut avoir à l'esprit qu'il faudra 2 caractères (non présents ci-dessous) pour représenter les restes des divisions euclidiennes par les nombres premiers de 11 à 97, qu'il faudra 3 caractères pour coder les restes selon les nombres premiers compris entre 101 et 997, puis 4 caractères pour coder les restes selon les nombres premiers compris entre 1009 et 9973, etc.

$m_1 = \varepsilon$	$m_{21} = 10\ldots$	$m_{41} = 121\ldots$	$m_{61} = 1115\ldots$	$m_{81} = 1014\ldots$
$m_2 = 0\ldots$	$m_{22} = 01\ldots$	$m_{42} = 002\ldots$	$m_{62} = 0226\ldots$	$m_{82} = 0125\ldots$
$m_3 = 1\ldots$	$m_{23} = 12\ldots$	$m_{43} = 113\ldots$	$m_{63} = 1030\ldots$	$m_{83} = 1236\ldots$
$m_4 = 0\ldots$	$m_{24} = 00\ldots$	$m_{44} = 024\ldots$	$m_{64} = 0141\ldots$	$m_{84} = 0040\ldots$
$m_5 = 1\ldots$	$m_{25} = 110\ldots$	$m_{45} = 100\ldots$	$m_{65} = 1202\ldots$	$m_{85} = 1101\ldots$
$m_6 = 0\ldots$	$m_{26} = 021\ldots$	$m_{46} = 011\ldots$	$m_{66} = 0013\ldots$	$m_{86} = 0212\ldots$
$m_7 = 1\ldots$	$m_{27} = 102\ldots$	$m_{47} = 122\ldots$	$m_{67} = 1124\ldots$	$m_{87} = 1023\ldots$
$m_8 = 0\ldots$	$m_{28} = 013\ldots$	$m_{48} = 003\ldots$	$m_{68} = 0235\ldots$	$m_{88} = 0134\ldots$
$m_9 = 10\ldots$	$m_{29} = 124\ldots$	$m_{49} = 1140\ldots$	$m_{69} = 1046\ldots$	$m_{89} = 1245\ldots$
$m_{10} = 01\ldots$	$m_{30} = 000\ldots$	$m_{50} = 0201\ldots$	$m_{70} = 0100\ldots$	$m_{90} = 0006\ldots$
$m_{11} = 12\ldots$	$m_{31} = 111\ldots$	$m_{51} = 1012\ldots$	$m_{71} = 1211\ldots$	$m_{91} = 1110\ldots$
$m_{12} = 00\ldots$	$m_{32} = 022\ldots$	$m_{52} = 0123\ldots$	$m_{72} = 0022\ldots$	$m_{92} = 0221\ldots$
$m_{13} = 11\ldots$	$m_{33} = 103\ldots$	$m_{53} = 1234\ldots$	$m_{73} = 1133\ldots$	$m_{93} = 1032\ldots$
$m_{14} = 02\ldots$	$m_{34} = 014\ldots$	$m_{54} = 0045\ldots$	$m_{74} = 0244\ldots$	$m_{94} = 0143\ldots$
$m_{15} = 10\ldots$	$m_{35} = 120\ldots$	$m_{55} = 1106\ldots$	$m_{75} = 1005\ldots$	$m_{95} = 1204\ldots$
$m_{16} = 01\ldots$	$m_{36} = 001\ldots$	$m_{56} = 0210\ldots$	$m_{76} = 0116\ldots$	$m_{96} = 0015\ldots$
$m_{17} = 12\ldots$	$m_{37} = 112\ldots$	$m_{57} = 1021\ldots$	$m_{77} = 1220\ldots$	$m_{97} = 1126\ldots$
$m_{18} = 00\ldots$	$m_{38} = 023\ldots$	$m_{58} = 0132\ldots$	$m_{78} = 0031\ldots$	$m_{98} = 0230\ldots$
$m_{19} = 11\ldots$	$m_{39} = 104\ldots$	$m_{59} = 1243\ldots$	$m_{79} = 1142\ldots$	$m_{99} = 1041\ldots$
$m_{20} = 02\ldots$	$m_{40} = 010\ldots$	$m_{60} = 0004\ldots$	$m_{80} = 0203\ldots$	$m_{100} = 0102\ldots$

On appelle *nombres orthogonaux* des nombres x et y dont les mots associés voient toutes leurs lettres de même position différentes jusqu'à la position $i = \lfloor\sqrt{max(x,y)}\rfloor$. Par exemple, (93 de début de mot associé 1032) est orthogonal à 10 (de début de mot associé 0103). On a étudié la différence de 4 lettres car $\pi(\lfloor\sqrt{93}\rfloor) = \pi(9) = 4$.

Deux nombres pairs ne peuvent être orthogonaux ainsi que deux nombres impairs.

La différence de deux nombres orthogonaux x et y est égale soit à 1 soit à un nombre premier : en effet,

$$\begin{array}{lll} \text{si } x \perp y \text{ alors } \quad \forall k \leqslant \sqrt{max(x,y)}, & m_x[k] \neq m_y[k] & \\ \iff & x \not\equiv y \ (mod\ p_k) & \\ \iff & x - y \not\equiv 0 \ (mod\ p_k) & \\ \iff & (x - y = 1) \vee & (x - y \text{ est un nombre premier puisqu'il n'est divisible} \\ & & \text{par aucun nombre premier inférieur à sa racine).} \end{array}$$

Ainsi 93-10=83 est premier tandis que 93-16=77 ne l'est pas (les mots associés à 93 et 16 ont pour même quatrième lettre la lettre 2 car $93 \equiv 16 \equiv 2\ (mod\ 7)$).

On peut aussi imaginer projeter les nombres sur l'intervalle $[0,1[$ selon un nombre premier p de la façon suivante : un nombre dont le reste de la division euclidienne par le nombre premier p est égal à i se projette sur le rationnel $\dfrac{i}{p}$. Par exemple, les nombres $3x+1$ ont pour projeté $\dfrac{1}{3}$, les $3x+2$ ont pour projeté $\dfrac{2}{3}$ et les $3x$ se projettent en 0. A chaque nombre peuvent ainsi être associés une infinité de rationnels de l'intervalle $[0,1[$ selon l'infinité des nombres premiers. Selon chaque premier, la densité de l'ensemble des nombres qui se projettent en le rationnel $\dfrac{i}{p}$ vaut $\dfrac{1}{p}$ et autant de nombres se projettent sur les rationnels de l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ que sur les rationnels de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.