Ordre moyen du nombre de décompositions de Goldbach via l'arbre des restes et le couplage du gnomon

Denise Vella-Chemla pilotant lumo, septembre 2026

Définition 1. *Pour n pair, on note $D(n) := \#\{p \text{ premier} : p \le n/2,\ n-p \text{ premier}\}$ le nombre de décompositions de Goldbach de n.*

Théorème 2 (Ordre moyen)**.** *Il existe des constantes absolues $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour tout $X \ge 4$:*

$$c_2 \frac{X^2}{(\log X)^2} \ \le \ \sum_{\substack{n \le X \\ n \text{ pair}}} D(n) \ \le \ c_1 \frac{X^2}{(\log X)^2}.$$

Autrement dit, le nombre moyen de décompositions de Goldbach d'un entier pair $n \le X$ est $\asymp \dfrac{X}{(\log X)^2} \asymp \dfrac{n}{(\log n)^2}$.

Statut de l'énoncé. Ce théorème est *inconditionnel* : le seul ingrédient externe est le théorème des nombres premiers (Hadamard et de la Vallée Poussin, 1896). Il ne montre pas Goldbach : une moyenne ne dit rien sur le minimum. Il est en revanche le théorème "au niveau du gnomon" que le cadre arborescent permet d'atteindre élémentairement, conformément à l'heuristique de Hardy-Littlewood : la densité locale couplée $\delta_M(n)$ (Proposition 13 de la synthèse) vaut en moyenne $\asymp \dfrac{1}{(\log X)^2}$, et la borne de crible de Brun majore chaque $D(n)$ du même ordre.

Démonstration. On compte globalement les couples :

$$R(X) := \sum_{\substack{n \le X \\ n \text{ pair}}} D(n) = \#\{(p,q) : p, q \text{ premiers},\ p+q \le X,\ p \le q\},$$

car chaque décomposition de n est un couple (p,q) de premiers impairs de somme $n \le X$ (le jumelage $p \le q$ évite de compter deux fois).

Majoration. Tout couple compté a $p, q \le X$ et $p+q \le X$, donc a fortiori $p, q \le X$. Chaque entier premier $p \le X$ s'associe à au plus $\pi(X)$ partenaires, donc

$$R(X) \le \pi(X)\,\pi(X) \le \left(C_1 \frac{X}{\log X}\right)^2$$

par la majoration de Tchebychev et le Théorème des nombres premiers ($\pi(x) \le C_1 x/\log x$ pour $x \ge 2$).

Minoration. On se restreint aux couples de premiers $p, q \in [X/4,\ X/2]$: tout couple de cette fenêtre vérifie $p+q \le X$, et $p \le q$ exactement la moitié du temps. Or

$$\pi(X/2) - \pi(X/4) \ \ge \ c_2' \frac{X}{\log X}$$

par le théorème des nombres premiers appliqué aux deux extrémités (le terme dominant $\frac{x}{\log x}$ ne s'annule pas : pour X assez grand, $\pi\left(\frac{X}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\frac{X}{2}\log\left(\frac{X}{2}\right)$ et $\pi\left(\frac{X}{4}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{X}{4}\log\left(\frac{X}{4}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{X}{\log X}\right)$). Ainsi la fenêtre contient $\gg \left(\frac{X}{\log X}\right)^2$ couples de premiers, dont la moitié est telle que $p \leq q$:

$$R(X) \geq c_2'' \frac{X^2}{(\log X)^2}.$$

Les deux bornes encadrent $R(X)$ comme annoncé. Enfin la moyenne sur n pair $n \leq X$ se lit en divisant par $\lfloor \frac{X}{2} \rfloor$: chaque n reçoit en moyenne $\frac{R(X)}{\frac{X}{2}} \asymp \frac{X}{(\log X)^2}$ décompositions, et $n \asymp X$ sur la tranche supérieure. □

Remarque : l'argument n'utilise aucun couplage fin : c'est le prix et la portée de la méthode globale. Dans le langage de l'arbre des restes, on a sommé toutes les feuilles n en oubliant leur chemin individuel - exactement ce que la Proposition "obstacle" (déficit $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$) interdisait de faire au niveau d'un seul n. L'ordre moyen est accessible là où l'énoncé ponctuel ne l'est pas.

Remarque : [Lien avec la série singulière] La moyenne pondérée de la densité $\delta_M(n)$ tronquée à $M = \sqrt{X}$ donne, par le théorème de Mertens,

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{n \leq X \\ n \text{ pair}}} \delta_{\sqrt{X}}(n) \asymp \frac{1}{(\log X)^2},$$

en cohérence exacte avec le Théorème 2 : la moyenne du gnomon couplé, sommée sur tout l'arbre au niveau X, retombe sur la série singulière moyennée. Le fait nouveau envisageable - hors de ce brouillon - serait une dérivation de l'*écart quadratique moyen* $\sum_n (D(n) - S(n)n/\log^2 n)^2$ dans le langage de l'arbre, l'équivalent arborescent des travaux sur l'écart quadratique moyen de Montgomery-Goldston.