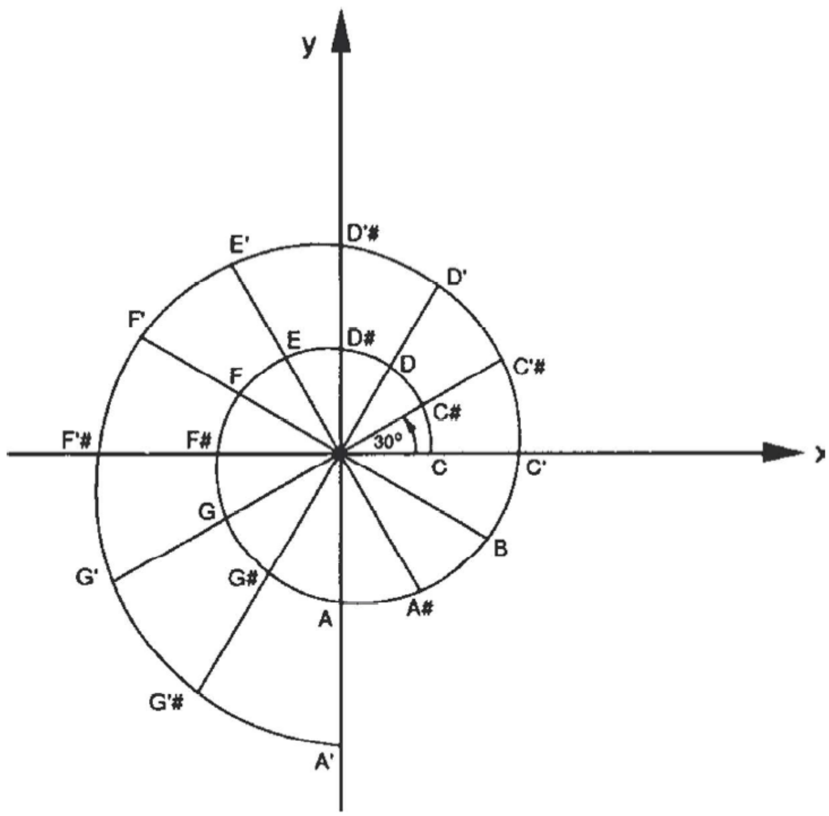
Des racines carrées, des logarithmes, des zéros et un demi (Denise Vella-Chemla, mars 2024)

Après avoir transcrit un article de Pierre Cartier "*Comment l'hypothèse de Riemann ne fut pas prouvée*", et apprécié tout l'humour du narrateur, qui conclut sa lettre ainsi "*Le mystère reste entier. De nouvelles (et ardentes) recherches seront nécessaires pour retrouver le coupable.*", on se sent reprise de la fièvre de la programmation à base de zéros de (la fonction) ζ (de Riemann) et de $\frac{1}{2}$. On essaie de comprendre ce dessin de spirale,



et on se dit qu'il faut diviser des logarithmes, c'est sûr, rajouter une pointe de racines carrées, à cause du $\frac{1}{2}$, mais ajouter tout de même ce $\frac{1}{2}$, ça ne peut pas nuire. Le programme calcule, pour les parties réelles des 29 premiers zéros de ζ, notés ρ_k, la fonction f définie ci-dessous ; les résultats sont concaténés dans une liste M, qui sera triée à chaque nouveau zéro de ζ considéré.

$$f(z) = \frac{\mathfrak{Re}\ \rho_k \ln\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{p}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right)}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log, sqrt, cos, pi

zeros = [14.134725142,21.022039639,25.010857580,30.424876126,32.935061588,
         37.586178159,40.918719012,43.327073281,48.005150881,49.773832478,
         52.970321478,56.446247697,59.347044003,60.831778525,65.112544048,
         67.079810529,69.546401711,72.067157674,75.704690699,77.144840069,
         79.337375020,82.910380854,84.735492981,87.425274613,88.809111208,
         92.491899271,94.651344041,95.870634228,98.831194218]

M=[]
i = 1
for z in zeros:
     M.append(z*log(0.5+sqrt(3))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(5))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(7))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(11))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(13))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(17))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(23))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(29))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(31))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(37))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(41))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(43))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(47))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.append(z*log(0.5+sqrt(53))/log(0.5+sqrt(2)))
     M.sort()
     print('', i, ' zeros ')
     for k in range(len(M)):
          print(M[k])
     i = i+1
```

La liste triée en ne considérant que le premier zéro de la fonction ζ de Riemann, de partie réelle 14.134725142 est :

17.4787385149473 74
21.910918205562787
24.948358784376694
29.15659436635049
30.745151707158012
33.32970589205372
36.287089136212565
38.58403363292845
39.24919424819101
41.022585350286874
42.0570369408157
42.53830636107178
43.439261595384615
44.66052358690775

Une fois accumulés dans la liste les résultats pour les 29 premiers zéros, le début de la liste, une fois triée, est :[1]

17.478738514947374
21.910918205562787
24.948358784376694
25.995463669055024
29.15659436635049
30.745151707158012
30.927961830431002
32.58727611728098
33.32970589205372
36.287089136212565
37.10474607919763
37.62283658249992
38.58403363292845
38.77053491885721
39.24919424819101
40.72688529045465
41.022585350286874
42.0570369408157
42.53830636107178
43.36349496364788
43.439261595384615
44.14517029105082
44.66052358690775
45.726095937617366
46.478369633470656
47.16306581939236
49.57000517378473
50.59932774017528

[1]Le fichier complet est là lien.