

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. On définit 4 variables ainsi :

$$X_a(n) = \#\{p + q = n \text{ tels que } p \text{ et } q \text{ impairs, } 3 \leq p \leq n/2, p \text{ et } q \text{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p + q = n \text{ tels que } p \text{ et } q \text{ impairs, } 3 \leq p \leq n/2, p \text{ composé et } q \text{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p + q = n \text{ tels que } p \text{ et } q \text{ impairs, } 3 \leq p \leq n/2, p \text{ premier et } q \text{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p + q = n \text{ tels que } p \text{ et } q \text{ impairs, } 3 \leq p \leq n/2, p \text{ et } q \text{ composés}\}$$

Dans la suite de ce document, on note  $E(x)$  la partie entière de  $x$  (i.e.  $\lfloor x \rfloor$ ).

On va supposer qu' $X_a(2n) = 0$  alors qu' $X_a(n)$  est non nul et essayer d'aboutir à une contradiction.

On essaie un premier cas, on s'aide visuellement de petits dessins ; on numérote les différentes parties pour les "tracer" lors du passage du dessin associé à  $n$  à celui associé à  $2n$ .

Quelques éléments sont à préciser :

- la couleur grise est utilisée pour les nombres composés, la couleur blanche est utilisée pour les nombres premiers ;
- les rectangles du bas représentent les petits sommants tandis que les rectangles du haut représentent les grands sommants des décompositions ;
- les décompositions sont "mêlées" : on échange les colonnes contenant chacune un entier  $x$  dans la ligne du bas et son complémentaire  $n - x$  dans la ligne du haut de façon à ce que toutes les colonnes de même type (i.e. contenant des décompositions de la forme *premier + premier*, *premier + composé*, *composé + premier* et *composé + composé*) soient juxtaposées pour permettre les comptages par les variables  $X_a(n)$ ,  $X_b(n)$ ,  $X_c(n)$ ,  $X_d(n)$ .
- il faut avoir à l'esprit que lors du passage de  $n$  à  $2n$ , tous les nombres qui interviennent dans les décompositions de  $n$  (compris entre 3 et  $n - 3$ ), qui se trouvent dans les deux lignes de nombres représentées sur la figure 1, se retrouvent sur la ligne du bas de la figure 2 (ce sont les petits sommants de  $2n$  qui sont compris entre 3 et  $n^*$ ).

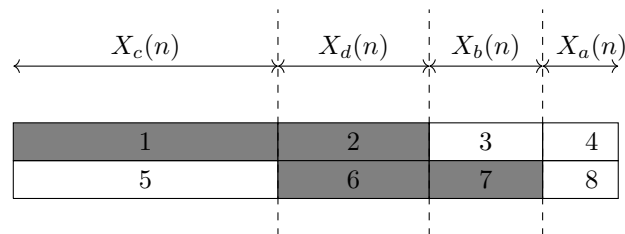


FIGURE 1 : décompositions de  $n$

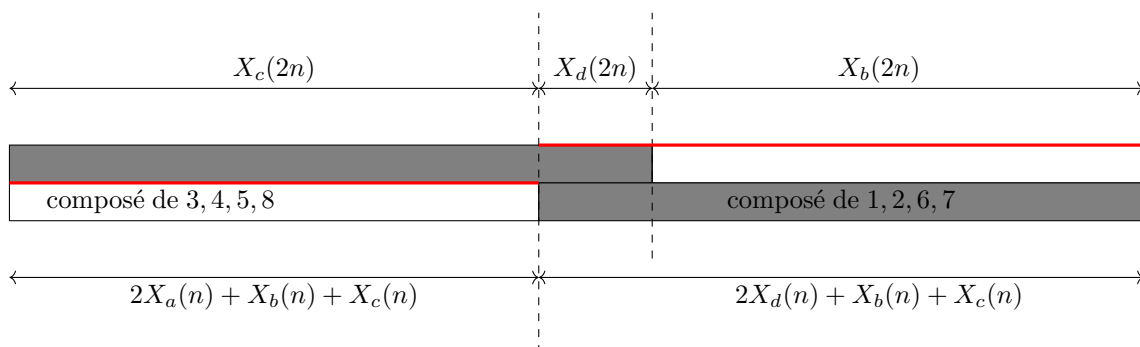


FIGURE 2 : décompositions de  $2n$

Sur la figure 2 ci-dessus, on a repassé en rouge les segments dont on utilise la longueur pour égaler la taille totale de la figure qui est connue.

\*. Il faudrait noter  $n - 3$  à la place de  $n$  mais on ne se préoccupe pas des cas-limites.

On a pour la figure 2, puisqu'on a posé comme hypothèse qu' $X_a(2n) = 0$  :

$$X_b(2n) + X_d(2n) + 2X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) = \frac{2n}{4}$$

*Explication de la provenance de l'égalité ci-dessus* :  $X_b(2n) + X_d(2n)$  est la longueur du segment rouge en haut à droite de la figure tandis que  $2X_a(n) + X_b(n) + X_c(n)$  est la longueur du segment rouge en bas à gauche.

On a trivialement pour la figure 1 :

$$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \frac{n}{4}$$

De ces 2 égalités, on déduit par soustraction de la seconde à la première :

$$X_b(2n) + X_d(2n) + X_a(n) - X_d(n) = \frac{n}{4}$$

1) Supposons  $X_d(n) > X_a(n)$ ; alors  $X_a(n) - X_d(n)$  est négatif d'une part et  $2X_d(n) > X_d(n) + X_a(n)$  d'autre part.

Mais cela conduit à une contradiction puisqu'on obtient <sup>†</sup> :

$$X_d(n) + X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_a(n) - X_d(n) = \frac{n}{4}$$

alors que  $X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \frac{n}{4}$  est la taille de la figure 1 qui ne saurait être égale à  $\frac{n}{4}$  si on lui ajoute un nombre négatif ( $X_a(n) - X_d(n)$ ).

2) Supposons maintenant que  $X_d(n) \leq X_a(n)$ .

La contradiction provient du fait de l'égalité :

$$X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n) \quad (1)$$

$X_d(n) - X_a(n)$  est strictement positif pour  $n \geq 122$ .  $\delta(n)$  est une variable négligeable qui vaut 0, 1 ou 2.

Pour  $n = 122$ ,  $X_d(n) = X_a(n)$ .

Au-delà, de ce nombre, alors que  $E(n/4)$  croît régulièrement tous les 4 entiers,  $\pi(n)$  n'augmente quant à elle qu'à chaque nombre premier, et donc la différence  $X_d(n) - X_a(n)$  s'accroît toujours davantage.

On a prouvé par récurrence dans <http://denise.vella.chemla.free.fr/nombres-et-lettres.pdf><sup>‡</sup> un certain nombre de propriétés dont l'égalité  $X_d(n) - X_a(n) = E(n/4) - \pi(n) + \delta(n)$  découle.

Alain Connes nous en a fourni une justification beaucoup plus simple que l'on recopie ci-dessous :

[En effet, pour  $n$  fixé, soit  $J$  l'ensemble des nombres impairs entre 1 et  $n/2$  et considérons les deux sous-ensembles de  $J$  :  $P = \{j \in J \mid j \text{ premier}\}, Q = \{j \in J \mid n - j \text{ premier}\}$ .

Alors je prétends que (1) résulte du fait très général sur des sous-ensembles quelconques et les cardinalités d'intersection et réunion :

$$\#(P \cup Q) + \#(P \cap Q) = \#(P) + \#(Q) \quad (2)$$

Ici (en négligeant les cas limites qui contribuent à  $\delta(n)$ ), on voit que

- (a)  $\#(P \cap Q)$  correspond à  $X_a(n)$ .
- (b)  $\#(P \cup Q)$  correspond à  $E(n/4) - X_d(n)$ .
- (c)  $\#(P) + \#(Q)$  correspond à  $\pi(n)$ .

On a donc une preuve très simple de (1) comme conséquence de (2).]

<sup>†</sup>. Pour comprendre comment on obtient cette égalité, regarder les deux expressions associées au segment rouge qui se trouve en haut à droite de la figure 2, l'une en haut et l'autre en bas de la figure.

<sup>‡</sup>. Cette note traduite en anglais a été postée sur Hal le 22 octobre 2014 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01109052>.