Vers une preuve de la conjecture de Goldbach

Denise Vella

Octobre 2005

Résumé : dans cet article, nous fournissons une preuve de la Conjecture de Goldbach, qui s'énonce de la façon suivante *"tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers"*. La conjecture de Goldbach est équivalente à *"tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est la moyenne de deux nombres premiers"*. Nous introduisons un treillis sur les nombres entiers naturels qui illustre au mieux un tel énoncé. La preuve que nous fournissons utilise les propriétés de l'arithmétique modulaire.

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

Nous allons ici prouver la conjecture de Goldbach en utilisant un raisonnement qui utilise des calculs en arithmétique modulaire.

Préalablement, nous présentons un treillis sur les nombres entiers naturels qui nous a permis de trouver les idées qui sous-tendent la démonstration et qui en permet une meilleure appréhension. Nous fournissons également quelques exemples qui étayent notre propos. Nous étudions ensuite une approche informatique de ce problème. Enfin, nous fournissons les conséquences de la preuve de la conjecture.

2 Un curieux treillis

Il s'agit de prouver la conjecture de Goldbach, qui peut s'énoncer ainsi : *tout entier supérieur ou égal à 3 est à égale distance de deux nombres premiers*[2].

D'une autre manière, cela revient à prouver que l'application f définie ci-dessous est surjective.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} - \{2\} \times \mathcal{P} - \{2\} &\rightarrow \mathcal{N} - \{0,1,2,3\}, \\ (P_i, P_j) &\mapsto (P_i + P_j)/2, \end{aligned}$$

[1] Les recherches présentées ici ont commencé il y a deux ans lorsque j'ai lu le roman de Doxiadis "Oncle Pétros et la Conjecture de Goldbach".

[2] Dans la mesure où 2 n'intervient pas dans les décompositions Goldbach, étant le seul nombre premier pair, nous en faisons un cas à part.

Nous notons $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres premiers.

Comment se fait-il qu'une telle application ne "rate" jamais d'entiers ?

Considérons le treillis (ou crible) de la figure **??** que nous appellerons dans la suite le treillis Goldbach.

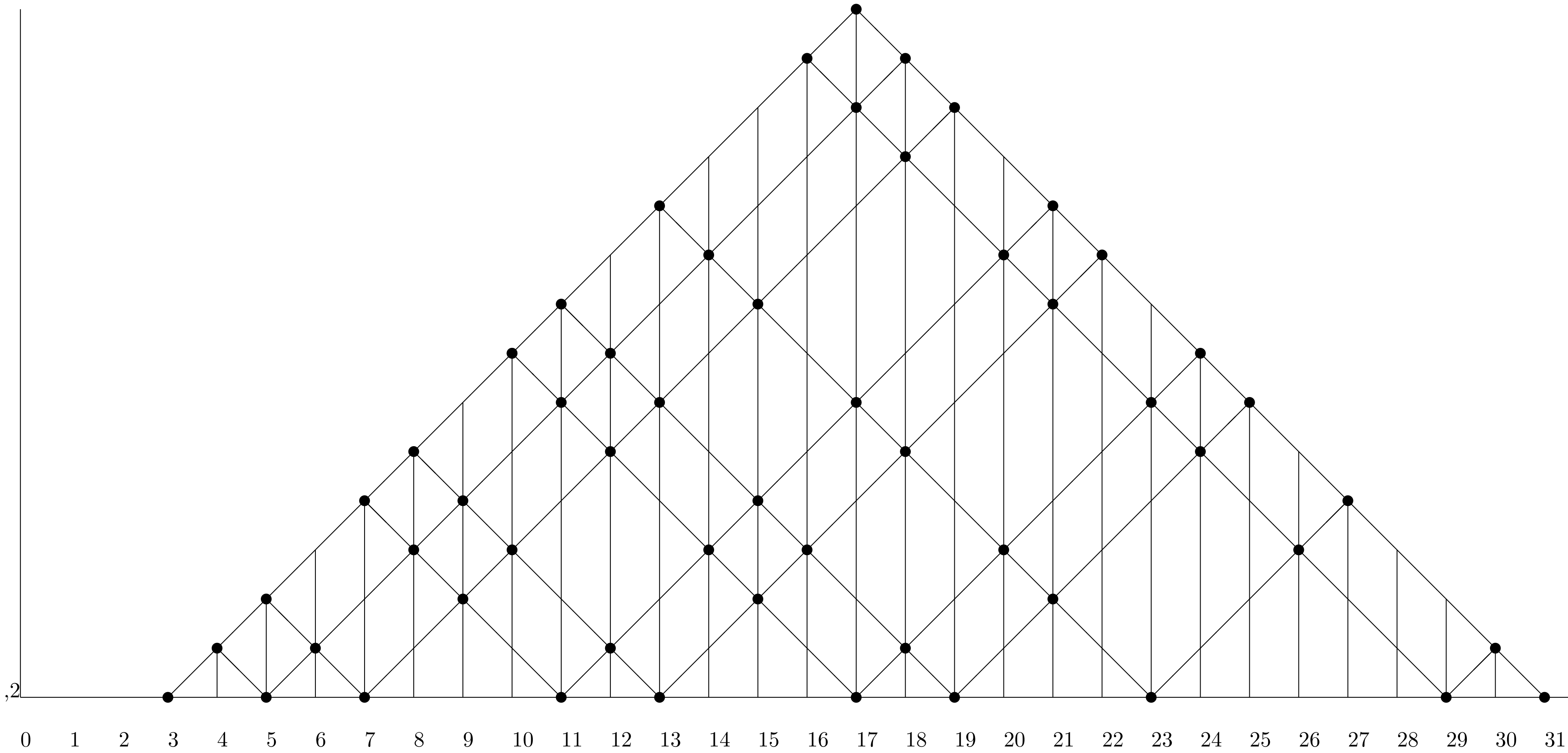

Figure 1: Le treillis Goldbach

Nous avons remplacé les lignes du treillis par des flèches pour le nombre 13 pour que soit plus explicite ce que nous entendons par *"diagonale ascendante"* et *"diagonale descendante"*.

Ce treillis se lit de la façon suivante : il y a un noeud au croisement de la diagonale ascendante correspondant à P_i, de la diagonale descendante correspondant à P_j, et de la verticale correspondant à x si et seulement si $x = (P_i + P_j)/2$.
Nous appellerons un tel croisement un tri-croisement.

Par exemple, et pour ne pas surcharger le dessin, nous avons fait apparaître les verticales des entiers 4, 5, 7, 11, 12, 14 et 15.

Observons la diagonale ascendante d'un P_i quelconque : elle se prolonge à l'infini et croise les diagonales descendantes de tous les P_j qui sont supérieurs à P_i. Donc tout nombre premier intervient dans une infinité de décompositions Goldbach.

Par exemple, en ce qui concerne le nombre premier 3, on voit qu'il intervient dans l'une des décompositions Goldbach d'une infinité d'entiers naturels [3].
3 intervient dans l'une des décompositions Goldbach des entiers 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 17...

$2{\times}11 = 3 + 19$
$2{\times}13 = 3 + 23$
$2{\times}16 = 3 + 29$
$2{\times}17 = 3 + 31$

Un entier naturel pourrait-il passer au travers des mailles du treillis Goldbach ? Démontrons maintenant que cela est impossible.

3 Preuve de la conjecture

Un nombre entier naturel peut être soit premier, soit composé.

Les nombres premiers correspondent au cas trivial : quand x est premier, $2x$ est trivialement décomposable en somme de deux nombres premiers, en l'occurrence tous deux identiques à x.

Intéressons-nous maintenant aux nombres composés.
Soit P_i le plus grand nombre premier inférieur à x ($P_i < x < P_{i+1}$). Regardons le treillis Goldbach $\mathcal{T}$ de base $2x$.

[3] 3 intervient dans une des décompositions Goldbach de Pi(m) entiers naturels (Pi(m) étant la notation habituelle utilisée pour désigner le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m).

Prouvons que ce treillis "couvre" x. On dira qu'un treillis couvre x s'il contient une décomposition Goldbach de x.

x admet dans sa décomposition en facteurs premiers un certain nombre de $P_j \leq P_i$ (et > 2). x ne peut pas admettre dans sa décomposition en facteurs premiers tous les $P_j \leq P_i$. Cela serait en contradiction avec le fait que x est inférieur à P_{i+1}, lui-même très inférieur au produit de tous les P_j inférieurs à P_i (résultat de Tchebychev, qui a démontré le postulat de Bertrand : il y a toujours un nombre premier entre n et $2n$).

- Premier cas : considérons l'un des P_j intervenant dans la factorisation de x et qui soit différent de 2 et de P_j.

  Un tel P_j vérifie $2x - P_j \equiv 0 \pmod{P_j}$. Il ne nous permet donc pas de trouver une décomposition de $2x$ car $2x - P_j$ est non premier.

  Illustrons cela sur le schéma de la figure 1 :

  $15 = 3 \times 5$ et donc il n'y a pas de tri-croisement sur les diagonales ascendantes de 3 et 5 pour la verticale correspondant à 15.

- Deuxième cas : intéressons-nous maintenant à un P_j qui ne serait pas un facteur de la décomposition en facteurs premiers de x. Alors, deux sous-cas se présentent :

  - cas 2a : soit le P_j en question est tel qu'il existe un P_k pour lequel :

    $$2x \equiv P_j \pmod{P_k}$$

    ; auquel cas, P_j ne peut pas intervenir non plus dans une décomposition Goldbach de $2x$. En effet, $2x - P_j \equiv 0 \pmod{P_k}$, donc $2x - P_j$ n'est pas premier.
    Dans l'exemple que nous étudierons au paragraphe 5, cela correspondra aux cases $(2x, 5) = 3, (13, 5) = 3$ donc $(2x - 13, 5) = 0$.
  - cas 2b : soit le nombre premier P_j en question est tel que, pour tout k :

    $$2x \not\equiv P_j \pmod{P_k}$$

    Alors $2x - P_j$ est premier et la paire d'entiers constituée des deux entiers P_j et $2x - P_j$ est une décomposition Goldbach de $2x$.

    Pourquoi un tel P_j existe-t-il forcément ?

    Il est tel que le système constitué des équations diophantiennes de la forme $2x - P_j \not\equiv 0(P_k)$ (quelque soit $P_k \leq P_i$) admet comme solution un P_j inférieur à P_i.

    Rappelons que nous sommes dans le cas où P_j ne divise pas x.
    L'équation

    $$-P_j.k + 2x.k' + P_j^2 - (P_j - P_j')^2 = 0$$

d'inconnues k et k' a une solution puisque $2x$ et P_j sont premiers entre eux.
Posons :

$$a = P_j.k + (P_j - P_j')^2$$
$$a = 2x.k' + P_j^2$$

Montrons qu'il existe un nombre premier P_j' tel que $a = P_j'^2$.
On transforme

$$a = P_j.k + (P_j - P_j')^2$$

en

$$a = (P_j - P_j')^2 \pmod{P_j}.$$

D'où on tire $a = P_j'^2$ que l'on réintroduit dans

$$a = 2x.k' + P_j^2$$

que l'on avait précédemment transformé en

$$a = P_j^2 \pmod{2x}.$$

De là, on tire : $2x = P_j + P_j'$, ce qu'il fallait démontrer.

P_j et $2x - P_j$ sont tous les deux premiers et permettent d'obtenir une décomposition Goldbach de $2x$.
exemple : on cherche à trouver la décomposition $28 = 11 + 17$.
Cela revient à résoudre l'équation $-17k + 28k' + 253 = 0$.
Cette équation en k et k' a comme solution $k = 5, k' = 6$.
$p_1 = \sqrt{28k' + 17^2} = \sqrt{121} = 11$
$p_2 = 28 - 11 = 17$.

On en conclut que $2x$ est toujours couvert par un P_j dont x n'est pas multiple.

4 Illustration par un exemple

Intéressons-nous au nombre $x = 14$. Ci-dessous, lisons le tableau[4] qui fournit les résultats des opérations de congruence appliquées aux différents nombres qui présentent un intérêt pour trouver la décomposition Goldbach de 14.

[4] La case (x, z) du tableau contient le nombre y si $x \equiv y \pmod{z}$

modulo	3	5	7	11	13
3	**0**	3	3	3	3
5	2	**0**	5	5	5
7	1	2	**0**	7	7
11	2	1	4	**0**	11
13	1	3	6	2	**0**
14	2	4	0	3	1
28	1	3	0	6	2
-13	2	2	1	9	**0**
-11	1	4	3	**0**	2
-7	2	3	**0**	4	6
-5	1	**0**	2	6	8
-3	**0**	2	4	8	10
2x-13	0	0	1	4	2
2x-11	2	2	3	6	4
2x-7	0	1	0	10	8
2x-5	2	3	2	1	10
2x-3	1	0	4	3	12

La ligne 6 correspond à x, la ligne 7 correspond à $2x$.
Les lignes (1) à (5) seront appelées partie A du tableau, les lignes (8) à (12) partie B, et les lignes (13) à (17) partie C.
Le système d'équations diophantiennes auquel il a été fait référence au paragraphe 3b est le suivant dans le cas de $x = 14$:

$$
\begin{aligned}
2x - 11 &= 3a + 2,\\
2x - 11 &= 5b + 2,\\
2x - 11 &= 7c + 3,\\
2x - 11 &= 11d + 6,\\
2x - 11 &= 13e + 4.
\end{aligned}
$$

Ce système a comme solution pour $x = 14$ le quintuplet $(a = 5, b = 3, c = 2, d = 1, e = 1)$.
On voit que les parties A et B du tableau ont toutes les deux leurs diagonales remplies de zéros (en gras dans le tableau) car chaque nombre premier est égal à 0 modulo lui-même.
D'autre part, $x = 14 = 2 \times 7$.
On voit un zéro à l'intersection de la ligne $2x - 7$ et de la colonne 7.

Pourquoi a-t-on un zéro dans la case $(2x - 13, 3)$? Prenons les cases $(2x, 3)$ et $(13, 3)$. Elles contiennent toutes deux un 1. Nous sommes dans le cas 2a du paragraphe 4 ci-dessus.

A quelle condition une ligne de la partie C du tableau correspond-elle à un nombre premier ?

Pour que $2x - P_j$ soit premier, il faut que toutes les cases de la ligne correspondant à $2x - P_j$ soient non nulles. Les deux nombres premiers P_j et $2x - P_j$ constituent alors une décomposition Goldbach de $2x$.

On voit que dans notre exemple, 28 a deux décompositions : 11 et $2x - 11 = 17$ d'une part, 5 et $2x - 5 = 23$, d'autre part.
De même, on voit sur la verticale de 15 les trois décompositions de 30 ($13 + 17$, $11 + 19$ et $7 + 23$).

5 Goldbach for children

5.1 Les billes

Imaginons que l'on a un nombre pair de billes.
On peut séparer ces billes en mettant le même nombre de billes dans deux sacs différents.
Imaginons maintenant que l'on fasse passer les billes une par une d'un sac à l'autre (en faisant toujours passer les billes de droite à gauche par exemple). Alors, la conjecture de Goldbach déclare qu'à un moment donné, et ce avant que l'on ait vidé tout le sac de droite, il y aura un nombre premier de billes dans chacun des sacs.

5.2 Les Lego

Considérons un nombre x que l'on veut placer exactement entre deux nombres premiers. Ce nombre x est à deux distances Δ_{gauche} et Δ_{droite} des nombres premiers qui l'entourent. Représentons ces distances par des briques du célèbre jeu de Lego.

Considérons la suite des Δ_i, qui donne l'écart entre deux nombres premiers P_i et P_{i+1} consécutifs. Voyons ces Δ_i comme des briques Lego que nous allons assembler à droite et à gauche des briques initiales et dans l'ordre dans lequel elles apparaissent pour avoir deux suites de briques de même longueur.

Les briques de longueur 2 peuvent être vues comme permettant en quelque sorte d' "affiner" nos deux séries de briques droite et gauche pour qu'elles soient de plus en plus proches l'une de l'autre.

6 Utilisons l'outil informatique

Dans le domaine des nombres premiers, les ordinateurs sont utilisés pour établir des records tels que *"le plus grand nombre premier trouvé à ce jour possède plus de 7 millions de chiffres, et s'appelle peut-être Mersenne 42"* ou bien *"jusqu'à* 2×10^{17}*, la conjecture de Goldbach est vraie"* (résultat établi par Oliveira et Silva en février 2005).

6.1 Par de multiples détours

Les recherches que nous avions entamées il y a deux ans suite à la lecture de [?], puis abandonnées, ont pris un nouvel essor en septembre 2005, avec la sortie en France de la traduction du livre de Marcus Du Sautoy [7], un livre de vulgarisation scientifique. Elles ont été ensuite enrichies par la lecture du livre de Jean-Paul Delahaye [?] puis totalement réorientées en parcourant le livre de [?]

Au tout début, nous réfléchissions à une manière élégante d'implémenter les horloges modulaires Gaussiennes. On peut voir l'horloge modulaire de n comme un polygone régulier à n côtés sur le cercle unité. Prenons comme convention que tous les polygones ont en commun le sommet correspondant à midi. Deux nombres sont premiers entre eux si leurs polygones réguliers respectifs n'ont aucun sommet commun hormis le sommet midi. Cette idée des polygones réguliers nous a fait faire un détour par les fractions à coefficients entiers. 4 n'est pas premier car $2/4 = 1/2$. Cela nous a amenée naturellement a nous rendre compte qu'un nombre était premier si toutes les fractions de $1/n$ à $(n-1)/n$ étaient non réductibles.

La considération des fractions entières $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$, nous a fait dériver vers les sinusoïdes. En effet, les sinusoïdes sont des fonctions qui passent régulièrement par zéro. La sinusoïde $\sin(5\pi x)$ s'annule justement pour les 4 fractions qui nous intéressent sur l'intervalle $]0,1[$. Un nombre n est ainsi premier si sa sinusoïde s'annule exactement $n-1$ fois dans l'intervalle $]0,1[$ et ce, jamais sur un point pour lequel s'annule la sinusoïde d'un nombre premier inférieur à lui.

Nous avons vite abandonné cette voie de recherche : le fait d'assimiler un nombre premier p à sa sinusoïde $\sin(p\pi x)$ semblait ne pas présenter d'intérêt ; en effet, même si cela a l'avantage de restreindre l'étude à l'intervalle $]0,1[$, dans la mesure où il y a une infinité de sinusoïdes qui s'annulent dans cet intervalle, on ne fait que transformer un problème sur des données infiniment grandes en un problème sur des données infiniment petites.

Cette vision *"ondulatoire"* des nombres premiers est cependant à rapprocher de la méthode du crible d'Érathostène, et pourrait expliquer la raréfaction des nombres premiers. Un nombre est premier s'il n'existe pas de nombre premier dont il soit le multiple. Le crible d'Érathostène élimine ainsi successivement les multiples de 2, puis de 3, puis de 5, etc.

Mettons-nous à la place d'un nombre (par exemple 17) qui regarde passer les filtres des nombres premiers qui vont éliminer peu à peu tous les nombres qui sont leurs composés.

Le filtre de 2 passe, 17 le traverse avec succès étant impair, 17 traverse également avec succès le filtre de 3, celui de 5, celui de 7, puis celui de 11, et enfin celui de 13. Du côté des sinusoïdes, de plus en plus de points de l'intervalle $]0,1[$ ont été touchés par les nombres premiers de 3 à 13. 17 a en quelque sorte de moins en moins de place pour pouvoir faire passer sa propre sinusoïde. Les zéros de la sinusoïde de 17 réussissent tout de même à s'intercaler entre les zéros des autres sinusoïdes.

Partant de là, plus un nombre est grand, plus il a de filtres à traverser, et moins il semblerait probabilistiquement parlant qu'il ait de chance d'être premier. Dit autrement, moins sa sinusoïde n'a d'espace pour intercaler ses zéros sur l'intervalle]0,1[. Cette raréfaction des nombres premiers a été démontrée (par Legendre, Euler ou encore Hadamar et la Vallée-Poussin).

En consultant la bibliographie abondante du domaine des nombres premiers, nous nous sommes aperçue que Mikolas avait prouvé le lien entre les fractions (suites de Farey) et les nombres premiers en 1949. Nous n'avions qu'un demi-siècle de retard ! Ces recherches présentent cependant un intérêt certain : dans l'article [**?**], il est fait référence à une façon d'associer à chaque fraction non réductible de l'arbre de Stern-Brocot, (et par extension à chaque fraction d'une suite de Farey, et par similitude à chaque nombre premier) un mot appartenant à un langage basé sur un alphabet binaire $\{L, R\}$ selon la position des fractions dans l'arbre de Stern-Brocot (L signifiant que la fraction est fille gauche de son père et R signifiant qu'elle en est fille droite). Cette voie serait à explorer pour trouver un programme qui s'arrête et qui prouve la conjecture de Goldbach. Enfin, concernant les propriétés étranges des fractions entières faisant intervenir des nombres premiers, on consultera la référence [**?**] qui présente de nombreux résultats très intéressants.

Avant de démontrer la conjecture, nous avons implémenté un programme qui calcule les moyennes des nombres premiers deux à deux jusqu'à un nombre premier donné. On se rend compte que ce programme engendre tous les entiers naturels "assez loin" (en fait, jusqu'à 10^6, le ratio le plus faible que l'on ait trouvé entre le plus petit entier naturel non engendré par un treillis de base allant jusqu'à un certain nombre premier a été 22/29 (proche de 0.75). Le premier nombre non couvert par un treillis de base approximative $2x$ semble toujours supérieur à 3/4 de x. Il faudrait exprimer de façon précise la limite de la fonction qui à x associe le rapport entre x et le plus petit entier naturel non engendré par le treillis de base approximative $2x$ mais nous n'avons pas les compétences mathématiques nécessaires au développement de tels résultats.

6.2 Conséquences de la preuve

Il fallait pour se convaincre "travailler à l'aveugle". Nous avons choisi dans la suite des Δ_i que nous avions obtenue par programme un Δ_i au hasard.

Quelle est la procédure à suivre pour trouver la décomposition Goldbach d'un entier compris entre P_i et P_{i+1}, qui se trouve à distance Δ_{gauche} de P_i et Δ_{droit} de P_{i+1} ?

Soit la suite définie de la façon suivante :

$\mathrm{S}_0 = \Delta_{droit} - \Delta_{gauche}$.

$$\mathrm{S}_{i+1} = \begin{cases} \mathrm{S}_i - \Delta_{i-1} & si\ \mathrm{S}_i > 0 \\ \mathrm{S}_i + \Delta_{i+1} & si\ \mathrm{S}_i < 0. \end{cases}$$

Cette suite est telle que l'un de ses S_i est nul. Lorsque S_i s'annule, on vient de trouver une décomposition Goldbach de x.

exemple : considérons les nombres premiers suivants et les Δ_i qui les séparent.

1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259

sauts : 6 6 2 6 12 10

Considérons le nombre 1238 : il est à 1 de 1237 et à 11 de 1249.

Calculons les termes de la suite :

$$
\begin{aligned}
&S_0 = 11 - 1 = 10 \\
&S_1 = 10 - 6 = 4 \\
&S_2 = 4 - 2 = 2 \\
&S_3 = 2 - 6 = -4 \\
&S_4 = 4 + 10 = 6 \\
&S_5 = 6 - 6 = 0
\end{aligned}
$$

Donc $2 \times 1238 = 1217 + 1259$ que l'on vérifie aisément.

Notre preuve de la conjecture a les conséquences suivantes :
Toute série de la forme :

$$
\begin{aligned}
&S_O = 3, \\
&S_1 = S_0 + \Delta_k, \\
&S_{i+1} = S_i + \Delta_{k-1}
\end{aligned}
$$

suffisamment longue contient un nombre premier. Dit autrement, le symétrique de la partie gauche du treillis "attrape" des nombres premiers dans sa partie droite.

Toute série de la forme :

$$
\begin{aligned}
&S_0 = 2x, \\
&S_1 = S_0 - P_1, \\
&S_{i+1} = S_i - P_{i+1}
\end{aligned}
$$

suffisamment longue contient un nombre premier. Dit autrement, le symétrique de la partie droite du treillis "attrape" des nombres premiers dans sa partie gauche.

6.3 Anecdotes

Pourrions-nous gagner de l'argent avec ça ? Comme tout le monde, nous ne verrions pas d'inconvénient à gagner de l'argent via l'EFF, en trouvant des nombres premiers encore et toujours plus grands !

Cependant, on voit bien que les idées sous-jacentes à notre preuve ne nous permettent de trouver des nombres premiers ultérieurs qu'à condition de connaître les Δ_i séparant tous les nombres premiers précédents. Or, les méthodes actuelles ont trouvé des nombres premiers très très grands en faisant des sauts par-dessus de nombreux premiers. Donc il ne semble pas que nos découvertes nous permettent d'obtenir dans l'immédiat une retraite bien méritée !

Enfin, une considération très esthétique : si on observe attentivement la lettre de Goldbach, on y lit :

4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+3

5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1

6 = 1+5 = 1+2+3 = 1+1+1+3 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+1+1

Il n'est fait aucunement référence à la multiplication ou à l'élévation à la puissance, qui sont des éléments essentiels de la factorisation en produit de facteurs premiers.
Nous préfèrerons donc désormais la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est à égale distance de deux nombres premiers"* au théorème essentiel de l'arithmétique.

7 Notes et remerciements

L'auteur est titulaire d'un diplôme de troisième cycle universitaire en Intelligence Artificielle obtenu en 1987 à l'Université des Sciences de Montpellier. Elle a été pendant 7 ans ingénieur en informatique dans la société Thalès. Elle dédie ces travaux à ses parents.

8 Conclusion et travaux à venir

According to Hardy, "It is comparatively easy to make clever guesses ; indeed there are theorems, like "Goldbach's Theorem", which have never been proved and which any fool could have guessed."

Il serait intéressant d'écrire un programme basé sur la logique qui s'appuierait sur nos travaux. Utiliser des outils informatiques de preuve de programme pourrait fournir une preuve informatique de la conjecture de Goldbach.

References

[1] C.F. Gauss. *Recherches arithmétiques.* Éd. Jacques Gabay, 1989.

[2] H. Cohen. *Les nombres premiers.* Éd. La recherche n°278, vol.26, p.760, juillet-août 1995.

[3] F. Casiro. *La conjecture de Goldbach, un défi en or.* Éd. Tangente n°78, décembre 2000, janvier 2001.

[4] J.P. Delahaye. *Merveilleux nombres premiers, voyage au coeur de l'arithmétique.* Éd. Belin Pour la Science, 2000.

[5] J.P. Delahaye. *Les fractions et leurs mystères.* Éd. Pour la science n°246, p.100, avril 1998.

[6] K. Devlin. *The Millenium problems : the seven greatest unsolved mathematical puzzles of our time.* Éd. Basic Books, 2002.

[7] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

[8] M. Du Sautoy. *The music of the primes.* Éd. Fourth Estate, 2003.

[9] J. Gibbons, D. Lester, R. Bird. *Functional Pearl, enumerating the rationals.*
http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/jeremy.gibbons/publications/rationals.pdf.

[10] D.A. Goldston, S.W. Graham, J. Pintz, C.Y. Yildirim. *Small gaps between primes or almost primes.* arXiv.org.math/0506067 (20 septembre 2005).

[11] B. Mazur. *Pourquoi les nombres premiers.* Éd.Les dossiers de la recherche, n°20, août 2005.

[12] M. Mikolas. *Farey series and their connection with the prime number problem. I.* Éd. Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. vol.13, p.93, 1949.

[13] M. Mikolas. *Farey series and their connection with the prime nomber problem. II.* Éd. Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. vol.14, p.5, 1951.

[14] A. Odlyzko, M. Rubinstein, M. Wolf. *Jumping champions.* Éd. 1997.

[15] D. Vella-Chemla, D. Diaz. *"Using clp(FD) to Support Air Traffic Flow Management".* Éd. Proceedings of International Logic Programming Symposium, 1994.

[16] M. Wolf. *On the twin and cousin primes.* Éd. IFTUWr 909/96, août 1996.

[17] *Revue trimestrielle - Pour la Science, les génies de la science", Riemann, le géomètre de la nature.* Éd. Août-Novembre 2002.

[18] *Les dossiers de la recherche, n°20, Mathématiques, nouveaux défis et vieux casse-tête.* Éd. août-octobre 2005.

[19] *Dossier Hors-série Pour la science, Les mathématiciens.* Éd. janvier 1994.

[20] *Numéro spécial La recherche, Les nombres.* Éd. n°278, juillet-août 1994.