1 Une formule qui semble minorer le nombre de décompositions de Goldbach

L'étude des grilles m'amène à proposer cette formule pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach d'un nombre pair donné.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui divise } x \\ 2 & \text{si } 2i+1 \textit{ est un nombre premier qui ne divise pas } x \end{cases}$$

On calcule :

$$f(2x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left(1 - \frac{a_i}{2i+1}\right)$$

On appelle $NbGoldbach(2x)$ le nombre de décompositions de $2x$ comme somme de deux nombres premiers.
Par programme, la fonction f testée jusqu'à 100000 fournit un nombre $f(2x)$ toujours inférieur à $NbGoldbach(2x)$ (sauf pour 9602 qui est le double de 4801, un nombre premier).

Dans un article de Bernard Teissier de 1966 [1], consacré au crible de Brun, des idées similaires sont présentées (notamment page 11-10 concernant la conjecture de Goldbach). L'auteur fournit des majorations du nombre de décomposants.

2 Essayer d'aller plus avant

J'avais proposé en août 2009 une fonction récursive qui calculait précisément le nombre de cases colorées de chaque ligne des grilles fournies ci-après et dans lesquelles apparaissent certaines des décompositions de Goldbach des nombres pairs de 24 à 100. Elle ne permet pas la minoration que semble permettre la fonction ci-dessus.

J'ai aussi pensé voir les nombres comme solutions de systèmes de congruences (cf le théorème des restes chinois). Cela permettait d'expliquer des résultats numériques sympathiques [2]. Or la fonction proposée ici considère identiquement des nombres selon qu'ils sont divisibles ou pas par un premier donné. Il faudrait faire deux choses maintenant : prouver que la fonction proposée minore bien le nombre de décompositions de Goldbach, et voir comment cette minoration évolue quand le nombre pair augmente.

Pourquoi minore-t-on le nombre de décomposants ?
- comme on a considéré seulement les nombres impairs et qu'on a de plus "plié le tissu", on multiplie globalement la somme des produits symétriques alternés par $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ au lieu de la multiplier par x, voire par $2x$;
- on considère qu'il faut systématiquement prendre $\frac{2}{p_i}$ dès que p_i ne divise pas x

[1] Bernard TEISSIER, Crible de Brun, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, no 2 (1965-1966), exp. no 11, p. 1-13., consultable à l'adresse
$http://www.numdam.org/item?id = SDPP\_1965-1966\_\_7\_2\_A1\_0$

[2] consultables à l'adresse http://denise.vella.chemla.free.fr/partager.pdf.

alors que certaines cases bleues s'évanouissent à l'extrême-gauche ou à l'extrême-droite des grilles.

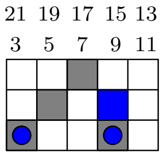
De toute façon, il faut prouver qu'on minore et je ne sais pas le prouver, je ne sais que le constater par programme, et encore sur un nombre minuscule de nombres. Et Poincaré écrit dans "La Science et l'Hypothèse" : "une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison."

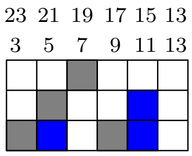
Comment la minoration évolue-t-elle au fur et à mesure que $2x$ augmente ?

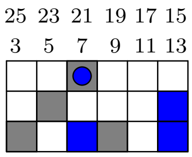
Ici, j'aimerais fournir un extrait de la biographie "Poincaré : philosophe et mathématicien" d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science. Au sujet du raisonnement par récurrence, il écrit : "le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de n-1, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence", déclare-t-il. Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers. D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence", s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré". L'"irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"...

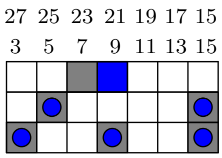
Qu'est-ce qui change, dans nos calculs, d'un nombre pair au suivant, ou bien d'un nombre pair à un nombre pair plus grand (et là, il faut être sûr qu'on ne laisse pas de nombres pairs de côté, en utilisant par exemple les arbres de nombres[3] que j'avais présentés et qui se réduisent ici à leur plus simple expression d'arbres binaires) ?
Le nombre de colonnes des grilles change une fois sur deux.
Le nombre de facteurs change à chaque fois qu'on arrive sur un nombre pair $2x$ qui est le double d'un carré $x = y^2$ tel que $2y + 1$ est premier...[4]

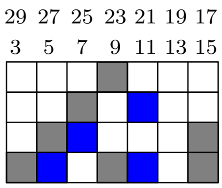
[3] http://denise.vella.chemla.free.fr/arbres.pdf
[4] Le programme de calcul de la fonction f et son résultat :
http://denise.vella.chemla.free.fr/novembre2010.cpp
http://denise.vella.chemla.free.fr/minore_goldbach

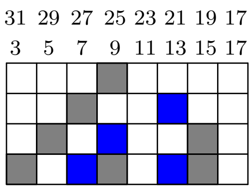

21 19 17 15 13
3 5 7 9 11

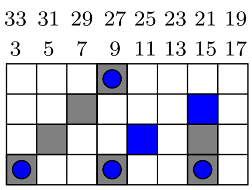

23 21 19 17 15 13
3 5 7 9 11 13

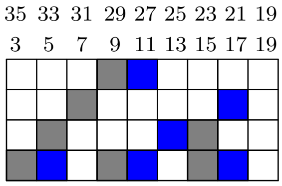

25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13

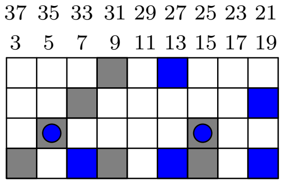

27 25 23 21 19 17 15
3 5 7 9 11 13 15

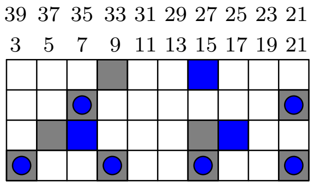

29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15

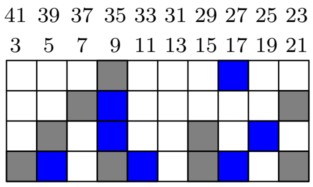

31 29 27 25 23 21 19 17
3 5 7 9 11 13 15 17

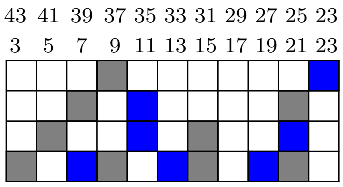

33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17

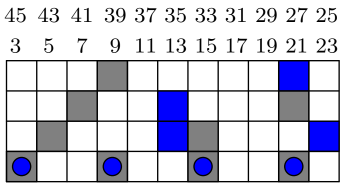

35 33 31 29 27 25 23 21 19
3 5 7 9 11 13 15 17 19

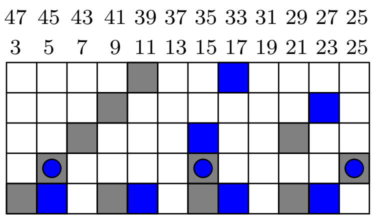

37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19

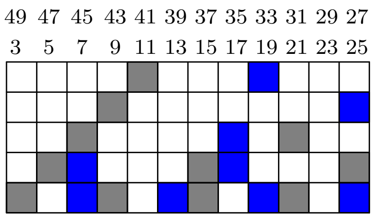

39 37 35 33 31 29 27 25 23 21
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

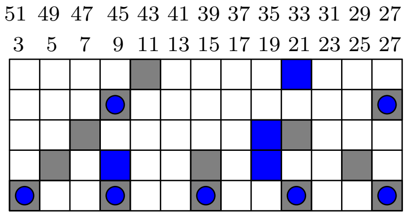

41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

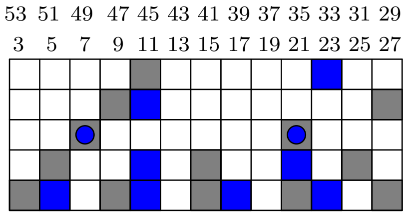

43 41 39 37 35 33 31 29 27 25 23
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

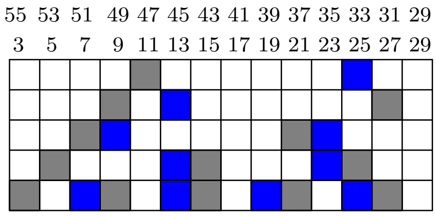

45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23

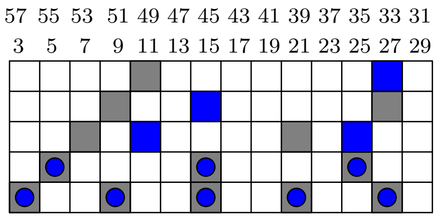

47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 25
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

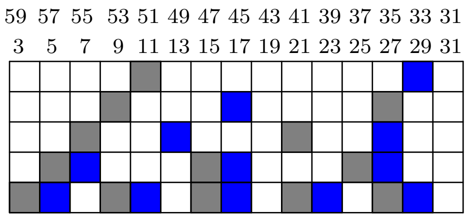

49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

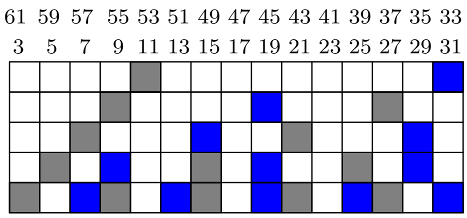

51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

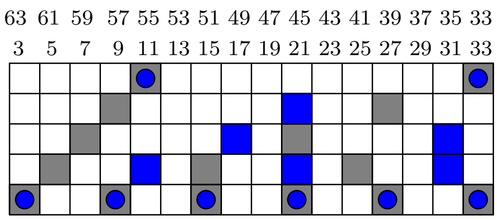

53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

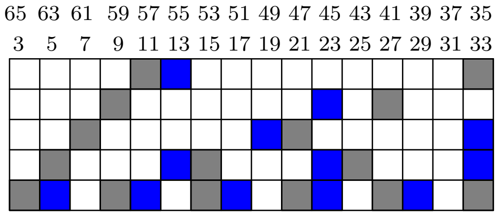

55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 29
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

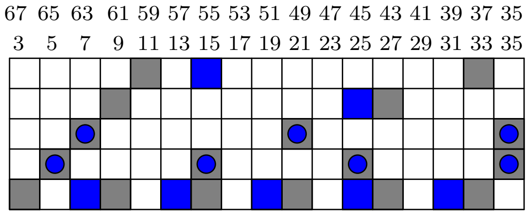

57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

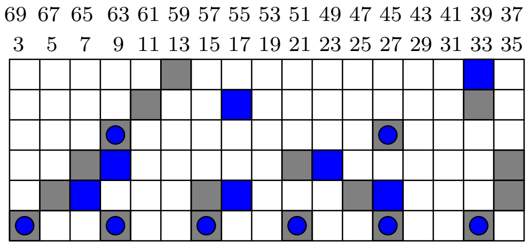

59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

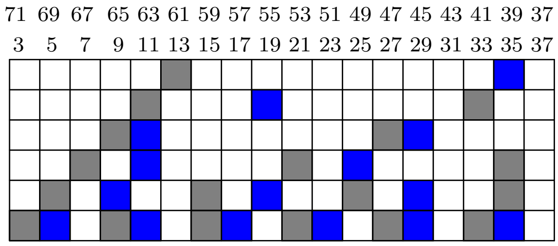

61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

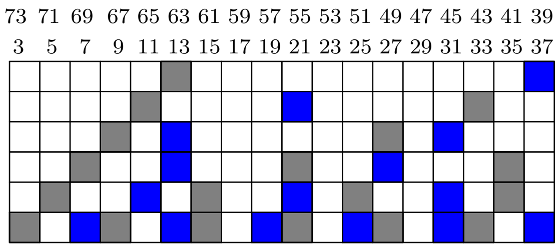

63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

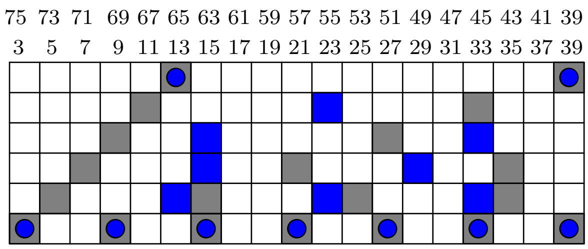

65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33

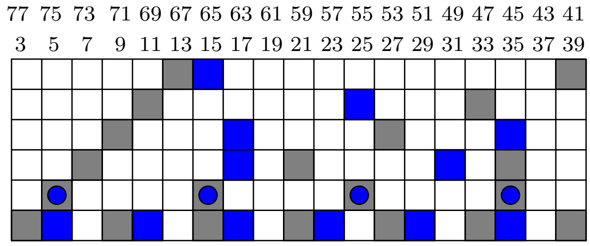

67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

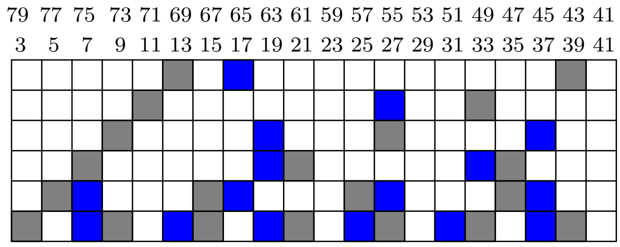

69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35

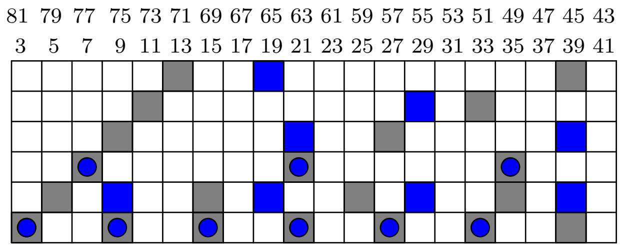

71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39 37
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

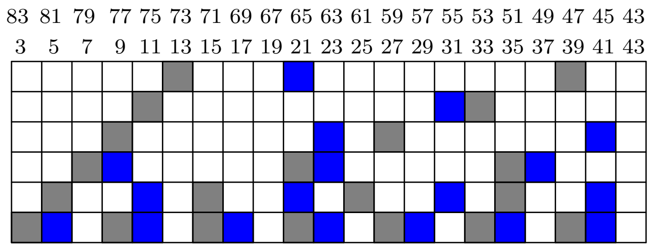

73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37

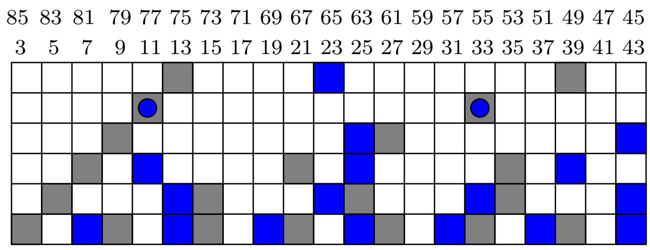

75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41 39
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

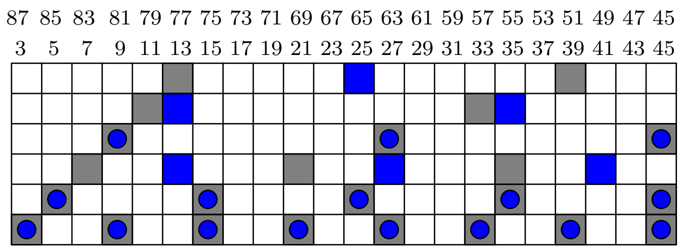

77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

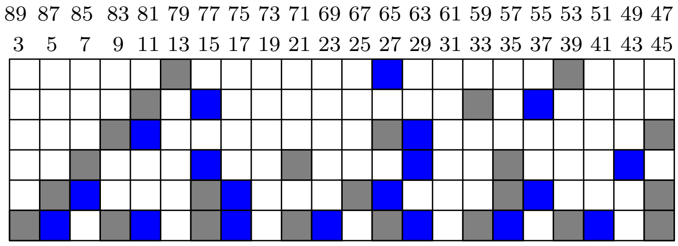

79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43 41
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

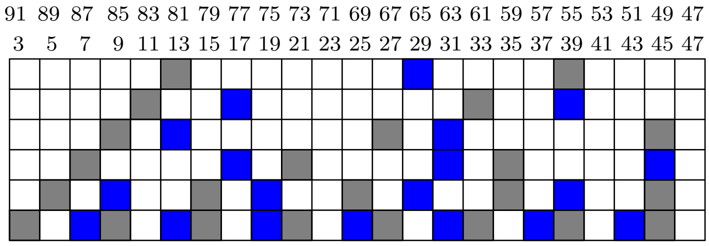

81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41

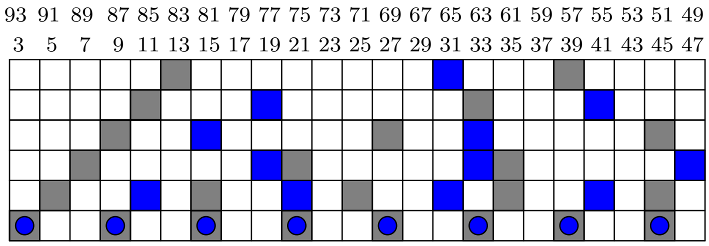

83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45 43
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43

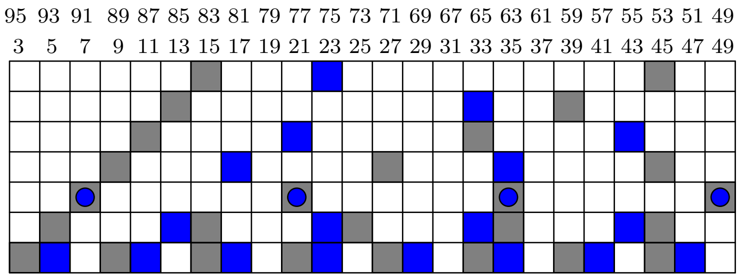

85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43

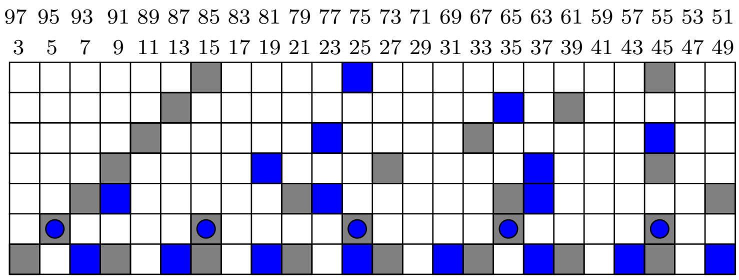

87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47 45
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45


89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45


91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49 47
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47


93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47


95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51 49
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49


97 95 93 91 89 87 85 83 81 79 77 75 73 71 69 67 65 63 61 59 57 55 53 51
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49