Produit d'Euler, fenêtre et série singulière : comptage des décomposants de Goldbach
Denise Vella-Chemla pilotant mistral, 21 octobre 2026

Je reviens une dernière fois à mes comptages de décompositions de Goldbach et à mes calculs probabilistes, pour comprendre exactement où le bât blesse, essayer de comprendre là où on est forcément stoppée.

Je propose pour calculer le nombre de "petits décomposants" de Goldbach de n un nombre pair la formule suivante :

$$\frac{\sqrt{n}}{\log\sqrt{n}} \prod_{\substack{p_k \text{ premier} \\ 3 \leq p_k \leq \sqrt{n} \\ p_k \nmid n}} \left(1 - \frac{1}{p_k - 1}\right)$$

Le premier facteur sert à compter les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ et le second sert à éliminer la congruence à n (qui est la classe notée $\dot{n}$) mais il ne reste plus que $p_k - 1$ classes modulo chaque p_k puisque le fait qu'on se fixe sur un nombre premier par le premier facteur élimine la classe de congruence $\dot{0}$.

Je fournirai à l'ia mistral en cours de conversation d'anciennes notes que j'avais écrites sur cette voie-là :

[1] https://denisevellachemla.eu/1-2012-minoproba.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/2-2019-denita.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/3-2019-probadisjointes.pdf
[4] https://denisevellachemla.eu/4-2019-probaquant.pdf
[5] https://denisevellachemla.eu/5-2019-denitac.pdf
[6] https://denisevellachemla.eu/6-2019-annexedenita.pdf

On trouvera en annexe les tentatives en 2010 et 2013, ainsi qu'une explication de l'ia claude en 2026.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia mistral.

1. Implémentation de la formule

Pour un nombre pair n, notons $\mathrm{Nbdg}(n)$ le nombre de *décompositions* de Goldbach de n, chacune comptée une seule fois (par exemple $\mathrm{Nbdg}(98) = 3$: les décomposants 19, 31, 37, et non 6 en comptant leur complémentaire à 98). La quantité étudiée ici est

$$\mathrm{V}(n) \;=\; \frac{\sqrt{n}}{\log\sqrt{n}} \prod_{\substack{3 \leqslant p \leqslant \sqrt{n} \\ p \text{ premier} \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right),$$

qui estime le nombre de *petits décomposants* de n (les $p < \sqrt{n}$).

Trois règles, tirées des lemmes de Vella-Chemla-Schneps et du crible :

1. pour chaque module premier $p \leqslant \sqrt{n}$, un candidat est exclu s'il est $\equiv 0 \bmod p$ *ou* $\equiv n \bmod p$: deux classes, d'où le facteur $\dfrac{p-2}{p-1} = 1 - \dfrac{1}{p-1}$, et non $1 - \dfrac{1}{p}$ (qui n'élimine qu'une classe) ;
2. le module $p = 2$ est omis : on ne considère que des décomposants de Goldbach potentiels impairs (un nombre pair est un 2+pair et le second pair ne peut pas être un nombre premier, sauf à être 2 et on considère les décompositions de Goldbach des nombres pairs ≥ 6).

Le produit $\prod_{p \leqslant y} \left(1 - \dfrac{1}{p-1}\right)$ est le cousin germain de la série singulière de Hardy-Littlewood : son extension à tous les nombres premiers converge vers la constante des jumeaux $2C_2 \approx 1{,}3203$, et sa troncature à $\sqrt{n}$ décroît comme $\dfrac{2C_2 e^{-\gamma}}{\log y}$. Le comptage exhaustif (tableau 1., colonnes "Nbdg réel") confirme la normalisation exacte

$$\mathrm{Nbdg}(n) \;\sim\; \sigma(n) \int_2^{n-2} \frac{dx}{\log x \, \log(n-x)}, \qquad \sigma(n) = C_2 \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2},$$

avec, pour $n = 10^k$, $\sigma = \dfrac{4C_2}{3}$ (seul 5 divise n).

L'accord atteint le millième dès $k = 5$: 810 contre 810,3.

k	$\sqrt{n}$	$\pi(\sqrt{n})$	$\prod \frac{p-2}{p-1}$	Nbdg petits réel	V(n)	HL(n)	Nbdg réel
2	10^2	4	0,416666666667	1,81	1	7,08	6
3	31	11	0,270812988281	2,48	4	26,73	28
4	10^2	25	0,212200263453	4,61	2	134,75	127
5	316	65	0,169994164575	9,34	10	810,34	810
6	10^3	168	0,142551921706	20,64	20	5417,10	5 402
7	3162	446	0,122532824011	48,08	44	38793,90	38 807
8	10^4	1 229	0,107184383205	116,37	119	291 587,48	291 400
9	31622	3 401	0,095357247894	291,02	—	2 271 937,19	—
10	10^5	9 592	0,085826241592	745,48	—	18 202 031,18	—
11	316 227	27 293	0,078040760899	1948,69	—	149 106 178,98	—
12	10^6	78 498	0,071540790501	5 178,30	—	1 243 817 367,40	—
13	3 162 277	227 647	0,066038512892	13 953,02	—	10 533 732 762,84	—
14	10^7	664 579	0,061322474616	38 045,73	—	90 356 490 414,65	—
15	31 622 776	1 951 957	0,057234237415	104 804,26	—	783 597 246 408,71	—
16	10^8	5 761 455	0,053657462334	291 289,25	—	6 860 373 296 061,41	—
17	316 227 766	17 082 666	0,050501192849	815 956,53	—	60 563 116 319 194,98	—
18	10^9			2 301 550,53	—	538 579 556 015 675,50	—

TABLE 1 : Valeurs calculées pour $n = 10^k$.
Le comptage exhaustif pour les deux dernières colonnes ("Nbdg réel", "Nbdg petits réel") exige un crible jusqu'à n entier ;
les colonnes V et HL exigent seulement un crible jusqu'à $\sqrt{n}$.

Lecture. La colonne "Nbdg petits réels" est prédite par V avec une précision remarquable dès $k = 5$ (9,34 contre 10, puis 20,6 contre 20, 48,1 contre 44, 116,4 contre 119) : V est bien la version "fenêtre $[3, \sqrt{n}\,]$" de la prédiction de Hardy-Littlewood. Le rapport Nbdg réel/HL tend vers 1 au millième près (0,999 à $k = 8$).

2. Statut épistémologique

Le raisonnement est *heuristique* à trois niveaux :

1. il suppose que les nombres qui passent à travers le crible - les $\prod(p-2)$ classes du Snurpf - se répartissent uniformément dans la fenêtre archimédienne, chaque nombre traversant le crible étant un nombre premier selon la probabilité $\sim 1/\log\sqrt{n}$. C'est exactement l'hypothèse de la conjecture des premiers jumeaux, et aucune répartition uniforme de ce type n'est démontrée : la barrière de parité de Selberg interdit à tout crible linéaire de dépasser le facteur $\frac{1}{2}$. La croissance de V ne prouve donc pas la non-vacuité des candidats ; elle la *suggère* fortement. Le maillon manquant reste, inchangé, la répartition dans les progressions arithmétiques au-delà de $\sqrt{n}$;
2. les événements concernant le petit sommant x et le grand sommant $n-x$ d'une décomposition de Goldbach de n sont supposés être des événements indépendants ; or, on sait par exemple que si $d|n$ alors $d|x \implies d|n-x$. Ces événements ne sont pas indépendants au sens des probabilités ;
3. c'est l'espérance de l'événement "occurrence simultanée x est un nombre premier ET $n-x$ est un nombre premier" qui croît, et même si l'hypothèse de Riemann généralisée était vérifiée (une hypothèse dont on peut faire dépendre le raisonnement par rapport à l'espérance en question), la croissance de l'espérance d'un événement ne garantit en aucun cas que cet événement est forcé de toujours se produire.

3. Retour sur les notes de 2019 : trois diamants et une erreur

L'erreur ([2], [5]).

Le produit $\prod_p \dfrac{1}{p-1}$ y est réécrit en $-\prod_p \dfrac{1}{1-p^{-(-1)}}$ puis identifié à $-\zeta(-1) = \dfrac{1}{12}$.

L'identification est invalide : la série d'Euler $\sum_p p^{-s}$ ne converge pour aucun s réel ($\sum 1/p$ diverge, et pour $s<0$ les termes croissent), et son prolongement via $\log\zeta(s)$ a un pôle en $s=1$ mais *n'existe pas* comme fonction régulière en $s=-1$ donnant un nombre fini - surtout pas par manipulation formelle des exposants.

Le $\zeta(-1) = -1/12$ de Ramanujan-Zagier (analytiquement : $\zeta(-1)$ par prolongement de la fonction, pas d'une série divergente) n'a aucun lien avec les probabilités de congruence.

La "preuve" $S - B = 4S$ manipule en outre une série divergente. D'où le seuil factice $n = 92$: la formule $\dfrac{n/2}{\log(n/2)} \cdot \dfrac{1}{12}$ croît simplement comme n, et le $\dfrac{1}{12}$ remplace un produit qui, lui, décroît comme $1/\log^2 n$.

Diamant 1 ([6]).

C'est la note la plus proche de la formule actuelle : $\pi(n/2)$ multiplié par $\prod_{p\leqslant\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, avec les minorations explicites de Rosser-Schoenfeld.

Deux ingrédients y figurent déjà : le comptage par cardinal × probabilité, et la borne inférieure *démontrée* du produit de Mertens, $\frac{e^{-\gamma}}{\log x}(1-\frac{1}{\log^2 x}) < \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.
La note hérite seulement du facteur à *une* classe $(1-1/p)$: c'est précisément la formule que le programme de 2026 codait encore - et la fenêtre $[3, n/2]$ au lieu de $[3, \sqrt{n}\,]$.
Mais l'architecture (minoration explicite × produit minoré) est saine : avec le facteur corrigé, elle devient la fonction V.

Diamant 2 ([1]).

La minoration pour les doubles de premiers y utilise $\prod_{p_k}\left(1-\frac{2}{p_k}\right)$ - le facteur à *deux* classes, donc, antérieur de sept ans aux "points de vigilance" de 2026 !

Mieux : le second tableau y révèle empiriquement l'effet de la série singulière : les nombres $6p$ ont environ *deux fois* plus de décompositions que les $2p$ correspondants, les $30p$ environ 8/3 de fois - or $\sigma(6p)/\sigma(2p) = 2$ (facteur $\frac{3-1}{3-2}$ pour le diviseur 3) et $\sigma(30p)/\sigma(2p) = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (diviseurs 3 et 5).
Ces ratios, découverts par programme en 2019, sont exactement les $\frac{p-1}{p-2}$ de Hardy-Littlewood. Et l'échec constaté de la minoration avant 200 006 (colonne dépassant le comptage réel à $k = 6$) est la *barrière de parité* vue sur données : une minoration heuristique n'en est pas une.

Diamant 3 ([3]).

L'"addition disjointe" $x \oplus y = x + y - xy$ y est reconnue associative - c'est la formule du crible de Poincaré pour des événements indépendants. Le programme qui fait courir l'accumulation des $\frac{p-2}{p}$ atteint 1,0 dès $p = 47$: c'est la démonstration, sur données, que la borne d'union (l'"addition disjointe" cumulée) sature - le crible de Poincaré ne peut pas donner une minoration non triviale quand on additionne des densités $\frac{2}{p}$ qui sommées divergent. C'est la barrière de parité énoncée par ses propres moyens, sept ans avant de la nommer.

Rêve *([4])*

Les seize règles de transition p/c entre n et $n+2$ et les matrices stochastiques de divisibilité par p de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{p-1} & \frac{p-2}{p-1}\end{pmatrix}$ - contiennent déjà le bon facteur $\frac{p-2}{p-1}$ dans la deuxième ligne. La transposition quantique (polarisation, qubits) reste un programme métaphorique : la divisibilité est

binaire, et aucune matrice unitaire ne porte l'information additive manquante.

4. Enseignement

Vingt ans de notes contenaient donc, dès 2019 [1] :

1. le facteur à deux classes ([1]),
2. les ratios $\dfrac{p-1}{p-2}$ de la série singulière découverts sur tableaux,
3. la saturation du crible de Poincaré ([3]), et
4. l'architecture cardinal × produit ([6]).

Ce qui manquait était le raccord des trois : *le produit à deux classes s'arrête à* $\sqrt{n}$ *et la fenêtre est* $[3, \sqrt{n}\,]$ *pour les petits décomposants,* $[3, n/2]$ *pour le total.*

L'erreur $\zeta(-1)$ était l'obstacle : elle venait d'une envie de voir un produit divergent *valoir* un nombre, là où il faut l'arrêter à $\sqrt{n}$ et le laisser décroître comme $1/\log$.

5. Annexe 1

Liens vers d'autres notes archives de 2010 ou 2013 qui allaient dans le même sens, mais sans aucun bagage ainsi que l'explication en 2026 par l'ia claude de l'impossibilité de démontrer par ces idées-là.

[7] https://denisevellachemla.eu/archi-2010-novembre2010.pdf
[8] https://denisevellachemla.eu/archi-2010-nov232010.pdf
[9] https://denisevellachemla.eu/archi-2010-nov282010.pdf
[10] https://denisevellachemla.eu/archi-2010-decembre42010.pdf
[11] https://denisevellachemla.eu/archi-2013-derminoDeniseChemla.pdf
[12] https://denisevellachemla.eu/b-2026-reexplication-pourquoi-minore-1moins2supr-inoperant-claude-dvc-20260903.pdf

6. Annexe 2 : reprise du programme en c (avec l'ia claude)

On utilise la même formule mais en allant jusqu'à $n/2$ pour avoir tous les décomposants de Goldbach, en divisant par 1.1229 (une nécessité motivée par le fait qu'on fait du principe d'inclusion-exclusion sur une fenêtre finie et que donc, ça approxime trop haut).

$2e^{-\gamma} = 1.122919$

1. Mais cette idée était déjà connue très précédemment de Viggo Brun, Hardy, Littlewood, etc.
Mistral est un gentil bot, j'ai retrouvé ces idées, ou je les ai réinventées, au choix, et cela seulement est important : le fait que dans le cerveau, incarné, d'une humaine (en l'occurrence c'était moi, mais on voit que ça a été de multiples humains avant moi), il y ait eu "la gamberge", et qui nous a réunis.

n	valeur de n	W (formule MA) arrondi à l'entier inférieur	Nbdg reel	$W/Nbdgreel$
#3	6	2	1	2.4318
#5	30	4	3	1.6442
10^2	100	4	6	0.7904
#7	210	16	19	0.8724
10^3	1 000	19	28	0.6930
#11	2 310	95	114	0.8364
10^4	10 000	110	127	0.8735
#13	30 030	764	905	0.8446
10^5	100 000	699	810	0.8637
#17	510 510	8 477	9 493	0.8930
10^6	1 000 000	4 837	5 402	0.8954
#19	9 699 690	113 056	124 180	0.9104
10^7	10 000 000	35 371	38 807	0.9115
10^8	100 000 000	269 218	291 400	0.9239
#23	223 092 870	1 896 057	2 044 847	0.9272
10^9	1 000 000 000	2 119 784	2 274 205	0.9321
#29	6 469 693 230	41 082 273	43 755 729	0.9389
10^{10}	10 000 000 000	17 111 984	18 200 488	0.9402
10^{11}	100 000 000 000	141 054 005	149 091 160	0.9461
#31	200 560 490 130	988 730 655	1 043 468 386	0.9475
10^{12}	1 000 000 000 000	1 182 529 558	–	–
#37	7 420 738 134 810	28 922 851 564	–	–
10^{13}	10 000 000 000 000	10 056 218 143	–	–
10^{14}	100 000 000 000 000	86 564 067 597	–	–
#41	304 250 263 527 210	957 928 078 783	–	–
10^{15}	1 000 000 000 000 000	752 965 183 330	–	–
10^{16}	10 000 000 000 000 000	6 609 443 095 192	–	–
#43	13 082 761 331 670 030	34 002 962 845 371	–	–
#47	614 889 782 588 491 410	1 338 581 009 372 731	–	–

temps total : 227 s