Conjecture de Goldbach et résidus quadratiques

Denise Vella-Chemla

28/9/11

1 Rappels

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.
Cette conjecture est trivialement vérifiée par les nombres pairs doubles de nombres premiers.
On rappelle que p est un décomposant de Goldbach de n si p est un nombre premier incongru* à n selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$.

$$\forall\, n \geq 6,\;\; n \;=\; p+q,\; p \textit{ et } q \textit{ premiers impairs} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, q \leq \sqrt{n}, \quad p \not\equiv n\ (q)^{\dagger}$$

Dans la suite, on utilise la notation de Gauss : $a\ R\ b$ représente le fait que a est résidu quadratique de b tandis que $a\ N\ b$ représente le fait que a est non-résidu quadratique de b.

On cherche à démontrer qu'il existe toujours un nombre premier q non-résidu de n ($q\ N\ n$) qui fournit une décomposition de Goldbach de n ($n \;=\; q+r$, avec q et r deux nombres premiers impairs).

Une telle existence provient vraisemblablement du fait que toutes les racines carrées des résidus quadratiques de n premiers à n ne peuvent être simultanément chacune congrue à n selon un nombre premier impair inférieur à $\sqrt{n}$.

*On utilise le terme proposé par Gauss dans les Recherches Arithmétiques.

†Par exemple, 98 a pour plus petit décomposant de Goldbach 19 parce que 3, 5, 7, 11, 13 et 17 sont tous congrus à 98 selon "quelqu'un".

$$98 = 2.7^2.$$
$$98 \equiv 3\ (mod\ 5).$$
$$98 \equiv 5\ (mod\ 3).$$
$$98 \equiv 7\ (mod\ 7).$$

Annexe 1 : Résidus quadratiques de n premiers à n pour les nombres de 2 à 100

2 : 1
3 : 1
4 : 1
5 : 1 4
6 : 1
7 : 1 2 4
8 : 1
9 : 1 4 7
10 : 1 9
11 : 1 3 4 5 9
12 : 1
13 : 1 3 4 9 10 12
14 : 1 9 11
15 : 1 4
16 : 1 9
17 : 1 2 4 8 9 13 15 16
18 : 1 7 13
19 : 1 4 5 6 7 9 11 16 17
20 : 1 9
21 : 1 4 16
22 : 1 3 5 9 15
23 : 1 2 3 4 6 8 9 12 13 16 18
24 : 1
25 : 1 4 6 9 11 14 16 19 21 24
26 : 1 3 9 17 23 25
27 : 1 4 7 10 13 16 19 22 25
28 : 1 9 25
29 : 1 4 5 6 7 9 13 16 20 22 23 24 25 28
30 : 1 19
31 : 1 2 4 5 7 8 9 10 14 16 18 19 20 25 28
32 : 1 9 17 25
33 : 1 4 16 25 31
34 : 1 9 13 15 19 21 25 33
35 : 1 4 9 11 16 29
36 : 1 13 25
37 : 1 3 4 7 9 10 11 12 16 21 25 26 27 28 30 33 34 36
38 : 1 5 7 9 11 17 23 25 35
39 : 1 4 10 16 22 25
40 : 1 9
41 : 1 2 4 5 8 9 10 16 18 20 21 23 25 31 32 33 36 37 39 40
42 : 1 25 37
43 : 1 4 6 9 10 11 13 14 15 16 17 21 23 24 25 31 35 36 38 40 41
44 : 1 5 9 25 37
45 : 1 4 16 19 31 34
46 : 1 3 9 13 25 27 29 31 35 39 41
47 : 1 2 3 4 6 7 8 9 12 14 16 17 18 21 24 25 27 28 32 34 36 37 42
48 : 1 25
49 : 1 2 4 8 9 11 15 16 18 22 23 25 29 30 32 36 37 39 43 44 46
50 : 1 9 11 19 21 29 31 39 41 49

51 : 1 4 13 16 19 25 43 49
52 : 1 9 17 25 29 49
53 : 1 4 6 7 9 10 11 13 15 16 17 24 25 28 29 36 37 38 40 42 43 44 46 47 49 52
54 : 1 7 13 19 25 31 37 43 49
55 : 1 4 9 14 16 26 31 34 36 49
56 : 1 9 25
57 : 1 4 7 16 25 28 43 49 55
58 : 1 5 7 9 13 23 25 33 35 45 49 51 53 57
59 : 1 3 4 5 7 9 12 15 16 17 19 20 21 22 25 26 27 28 29 35 36 41 45 46 48 49 51 53 57
60 : 1 49
61 : 1 3 4 5 9 12 13 14 15 16 19 20 22 25 27 34 36 39 41 42 45 46 47 48 49 52 56 57 58 60
62 : 1 5 7 9 19 25 33 35 39 41 45 47 49 51 59
63 : 1 4 16 22 25 37 43 46 58
64 : 1 9 17 25 33 41 49 57
65 : 1 4 9 14 16 29 36 49 51 56 61 64
66 : 1 25 31 37 49
67 : 1 4 6 9 10 14 15 16 17 19 21 22 23 24 25 26 29 33 35 36 37 39 40 47 49 54 55 56 59 60
62 64 65
68 : 1 9 13 21 25 33 49 53
69 : 1 4 13 16 25 31 49 52 55 58 64
70 : 1 9 11 29 39 51
71 : 1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 16 18 19 20 24 25 27 29 30 32 36 37 38 40 43 45 48 49 50
54 57 58 60 64
72 : 1 25 49
73 : 1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 19 23 24 25 27 32 35 36 37 38 41 46 48 49 50 54 55 57 61 64
65 67 69 70 71 72
74 : 1 3 7 9 11 21 25 27 33 41 47 49 53 63 65 67 71 73
75 : 1 4 16 19 31 34 46 49 61 64
76 : 1 5 9 17 25 45 49 61 73
77 : 1 4 9 15 16 23 25 36 37 53 58 60 64 67 71
78 : 1 25 43 49 55 61
79 : 1 2 4 5 8 9 10 11 13 16 18 19 20 21 22 23 25 26 31 32 36 38 40 42 44 45 46
49 50 51 52 55 62 64 65 67 72 73 76
80 : 1 9 41 49
81 : 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58 61 64 67 70 73 76 79
82 : 1 5 9 21 23 25 31 33 37 39 43 45 49 51 57 59 61 73 77 81
83 : 1 3 4 7 9 10 11 12 16 17 21 23 25 26 27 28 29 30 31 33 36 37 38 40 41 44 48 49
51 59 61 63 64 65 68 69 70 75 77 78 81
84 : 1 25 37
85 : 1 4 9 16 19 21 26 36 49 59 64 66 69 76 81 84
86 : 1 9 11 13 15 17 21 23 25 31 35 41 47 49 53 57 59 67 79 81 83
87 : 1 4 7 13 16 22 25 28 34 49 52 64 67 82
88 : 1 9 25 49 81
89 : 1 2 4 5 8 9 10 11 16 17 18 20 21 22 25 32 34 36 39 40 42 44 45 47 49 50 53 55
57 64 67 68 69 71 72 73 78 79 80 81 84 85 87 88
90 : 1 19 31 49 61 79
91 : 1 4 9 16 22 23 25 29 30 36 43 51 53 64 74 79 81 88
92 : 1 9 13 25 29 41 49 73 77 81 85
93 : 1 4 7 10 16 19 25 28 40 49 64 67 70 76 82
94 : 1 3 7 9 17 21 25 27 37 49 51 53 55 59 61 63 65 71 75 79 81 83 89
95 : 1 4 6 9 11 16 24 26 36 39 44 49 54 61 64 66 74 81
96 : 1 25 49 73
97 : 1 2 3 4 6 8 9 11 12 16 18 22 24 25 27 31 32 33 35 36 43 44 47 48 49 50 53 54
61 62 64 65 66 70 72 73 75 79 81 85 86 88 89 91 93 94 95 96
98 : 1 9 11 15 23 25 29 37 39 43 51 53 57 65 67 71 79 81 85 93 95
99 : 1 4 16 25 31 34 37 49 58 64 67 70 82 91 97
100 : 1 9 21 29 41 49 61 69 81 89

Annexe 2 : Illustration de l'énoncé "On trouve toujours un nombre premier non-résidu de n dont le carré est congru à un résidu de n premier à n qui fournisse une décomposition de Goldbach de n" pour les nombres pairs de 8 à 100

8, 3 N 8, $3^2 \equiv 1(8)$, 1 R 8 et 1 premier à 8, 3+5.

12, 5 N 12, $5^2 \equiv 1(12)$, 1 R 12 et 1 premier à 12, 5+7.

16, 3 N 16, $3^2 \equiv 9(16)$, 9 R 16 et 9 premier à 16, 3+13.

18, 5 N 18, $5^2 \equiv 7(18)$, 7 R 18 et 7 premier à 18, 5+13.

20, 3 N 20, $3^2 \equiv 9(20)$, 9 R 20 et 9 premier à 20, 3+17.

24, 5 N 24, $5^2 \equiv 1(24)$, 1 R 24 et 1 premier à 24, 5+19.

28, 5 N 28, $5^2 \equiv 25(28)$, 25 R 28 et 25 premier à 28, 5+23.

30, 17 N 30, $17^2 \equiv 19(30)$, 19 R 30 et 19 premier à 30, 17+13.

32, 3 N 32, $3^2 \equiv 9(32)$, 9 R 32 et 9 premier à 32, 3+29.

36, 5 N 36, $5^2 \equiv 25(36)$, 25 R 36 et 25 premier à 36, 5+31.

40, 3 N 40, $3^2 \equiv 9(40)$, 9 R 40 et 9 premier à 40, 3+37.

42, 5 N 42, $5^2 \equiv 25(42)$, 25 R 42 et 25 premier à 42, 5+37.

44, 3 N 44, $3^2 \equiv 9(44)$, 9 R 44 et 9 premier à 44, 3+41.

48, 5 N 48, $5^2 \equiv 25(48)$, 25 R 48 et 25 premier à 48, 5+43.

50, 3 N 50, $3^2 \equiv 9(50)$, 9 R 50 et 9 premier à 50, 3+47.

52, 5 N 52, $5^2 \equiv 25(52)$, 25 R 52 et 25 premier à 52, 5+47.

54, 11 N 54, $11^2 \equiv 13(54)$, 13 R 54 et 13 premier à 54, 11+43.

56, 3 N 56, $3^2 \equiv 9(56)$, 9 R 56 et 9 premier à 56, 3+53.

60, 17 N 60, $17^2 \equiv 49(60)$, 49 R 60 et 49 premier à 60, 17+43.

64, 3 N 64, $3^2 \equiv 9(64)$, 9 R 64 et 9 premier à 64, 3+61.

66, 29 N 66, $29^2 \equiv 49(66)$, 49 R 66 et 49 premier à 66, 29+37.

68, 7 N 68, $7^2 \equiv 49(68)$, 49 R 68 et 49 premier à 68, 7+61.

70, 17 N 70, $17^2 \equiv 9(70)$, 9 R 70 et 9 premier à 70, 17+73.

72, 5 N 72, $5^2 \equiv 25(72)$, 25 R 72 et 25 premier à 72, 5+67.

76, 23 N 76, $23^2 \equiv 73(76)$, 73 R 76 et 73 premier à 76, 23+53.

78, 5 N 78, $5^2 \equiv 25(78)$, 25 R 78 et 25 premier à 78, 5+73.

80, 7 N 80, $7^2 \equiv 49(80)$, 49 R 80 et 49 premier à 80, 7+73.

84, 5 N 84, $5^2 \equiv 25(84)$, 25 R 84 et 25 premier à 84, 5+79.

88, 17 N 88, $17^2 \equiv 25(88)$, 25 R 88 et 25 premier à 88, 17+71.

90, 17 N 90, $17^2 \equiv 19(90)$, 19 R 90 et 19 premier à 90, 17+73.

92, 19 N 92, $19^2 \equiv 85(92)$, 85 R 92 et 85 premier à 92, 19+73.

96, 17 N 96, $17^2 \equiv 1(96)$, 1 R 96 et 1 premier à 96, 17+79.

98, 19 N 98, $19^2 \equiv 67(98)$, 67 R 98 et 67 premier à 98, 19+79.

100, 3 N 100, $3^2 \equiv 9(100)$, 9 R 100 et 9 premier à 100, 3+97.

Bibliographie

[1] **C. F. Gauss**, *Recherches Arithmétiques*, Editions Jacques Gabay, 1801.

[2] **G. Cantor**, *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach*, Congrès de Caen de l'A.F.A.S. (Association Française pour l'Avancement des Sciences) du 10 août 1894, p.117 à 134.