Retrouver les décomposants de Goldbach
sur la droite des logarithmes
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, 8 octobre 2026

Suite à l'écoute de la conférence d'Alain Connes à l'Ircam le 3 octobre 2026, où il parle du site musical, je fournis à l'ia mistral les documents suivants :

https://denisevellachemla.eu/correspondance-2-3-claude-dvc-20261004.pdf
https://denisevellachemla.eu/concentriques40.pdf
https://denisevellachemla.eu/concentriques98.pdf
https://denisevellachemla.eu/concentriques400.pdf .

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia mistral.

Résumé

Sur la droite des logarithmes, multiplier par n est la translation de longueur $\ln n$: c'est la lecture du site musical de Connes, développée dans la correspondance sur les puissances de 2 et de 3 [1]. Sur les cercles concentriques [2, 3, 4], les décomposants de Goldbach de n sont les points qu'aucune "multiplicité" des cercles de modules premiers $q \leq \sqrt{n}$ n'atteint. Nous montrons ici que ce crible géométrique se transporte *exactement* sur la droite des logarithmes, à une seule condition : regarder chaque premier p de l'intervalle $(\sqrt{n}, n)$ à travers le nombre

$$T_p \;=\; n \ln \frac{n}{p},$$

la translation qui sépare p du *sommet* n, dilatée par n. L'autre sommant affine $s = n - p$ se lit alors dans le logarithme : $T_p = s + B(s)$, où le "flou" $B(s) = n \ln(1 + s/n) - s$ est une fonction universelle de s ; et un premier $q \leq \sqrt{n}$ divise s si et seulement si le réseau $q\mathbb{Z}$ touche T_p *au flou*. Les décomposants de Goldbach sont exactement les premiers dont le T_p n'appartient à aucun des réseaux $q\mathbb{Z}$, au flou près : pour $n = 98$, le microscope isole 19, 31 et 37 sans erreur. La méthode, vérifiée exhaustivement jusqu'à $n = 10^6$ (zéro collision, zéro omission), et dont l'absence de collision est désormais un théorème (Hermite–Lindemann, observation de l'ia claude [12]), a une lecture musicale : chaque cercle devient une gamme également divisée du sommet, et le flou joue le rôle d'un comma. Une dernière section répond point par point à l'objection de parité [5] : le microscope ne prédit pas les comptages (là, la parité de Selberg fait obstruction), mais il *reconnaît* exactement les décomposants, ce que cette barrière ne frappe pas.

1. Contexte : le site musical, la droite des pas, les cercles

Le point de départ est la conférence d'Alain Connes à l'Ircam (après-midi Mamuphi) sur le site musical, et le texte *Mettre en correspondance les puissances de 2 et les puissances de 3* [1], qui en tire la modélisation suivante :

- dans la coordonnée $t = \ln x$, l'ensemble $(0, \infty)$ devient *une seule droite*, sur laquelle multiplier par n est la translation de longueur $\ln n$; les orbites de 2 et de 3 sont les réseaux $\mathbb{Z} \ln 2$ et $\mathbb{Z} \ln 3$, incommensurables (rapport $\ln 3 / \ln 2$ irrationnel), et le tempérament consiste à remplacer le groupe de rang 2 $\mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3$ par le rang 1 en identifiant $\ln 2 = 12u$ et $\ln 3 \approx 19u$;

- dans la note aux Comptes Rendus de 1996 [6], la même droite porte tout : chaque entier n contribue la phase $n^{-is} = e^{-is\ln n}$, les premiers sont les translations de base $\ln p$, et les zéros de ζ sur la droite critique sont les fréquences s d'annulation de la somme de ces phases.

Les cercles concentriques [2, 3, 4] sont l'autre versant : une description *affine, modulaire*, de Goldbach. Pour n fixé, on dessine les cercles concentriques de modules premiers $q \le \sqrt{n}$; sur le cercle de module q, on raye les multiples de q ; les décomposants de Goldbach p de n (avec $p > \sqrt{n}$) sont les points qu'aucune rayure ne touche, car l'autre sommant $s = n - p$ n'a aucun facteur premier $\le \sqrt{n}$.

Pour $n = 98$:

$$98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61,$$

et l'affirmation affine est limpide : 98 est un $2k$, un $3k+2$, un $5k+3$, un $7k$, donc tout autre sommant s passant à travers tous les cribles est un $2k+1$, un $3k+x$ avec $x \not\equiv 0, 2$, un $5k+y$ avec $y \not\equiv 0, 3$, un $7k+z$ avec $z \not\equiv 0$ - à la rigueur, si l'on veut aussi les "petits" décomposants, $x \not\equiv 0$ seulement mod s lui-même mais mod personne d'autre.

La question posée ici : peut-on faire "trouver magiquement" 19, 31, 37 *du point de vue du logarithme*, c'est-à-dire obtenir le même crible que celui des cercles, mais lu sur la droite des logarithmes ? Oui : il suffit d'un *microscope* - une dilatation par n de la translation qui mène au sommet.

2. Le microscope : $T_p = n\ln(n/p)$

Définition 1 (microscope logarithmique au sommet)**.** *Soit $n \ge 4$ et $p \in (\sqrt{n}, n)$ un nombre premier. On pose*

$$s = n - p, \qquad T_p \;=\; n\ln\frac{n}{p} \;=\; n\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right).$$

T_p est une quantité *purement logarithmique* : c'est la longueur de la translation qui sépare p du sommet n sur la droite des logarithmes, multipliée par n. Or :

Proposition 2 (l'autre sommant caché dans l'écho)**.** *Pour tout $p \in (0, n)$, avec $s = n - p$,*

$$T_p \;=\; s \;+\; B(s), \qquad B(s) \;=\; \sum_{k\ge 2} \frac{s^k}{k\, n^{k-1}} \;=\; \frac{s^2}{2n} + \frac{s^3}{3n^2} + \frac{s^4}{4n^3} + \cdots$$

La série converge (car $0 \le s/n < 1$), et B est une fonction universelle de s : elle ne dépend pas de p autrement que par s lui-même. De plus

$$0 \;<\; B(s) \;<\; \frac{s^2}{2(n-s)}.$$

Démonstration. C'est le développement $-\ln(1-u) = \sum_{k\ge1} u^k/k$ avec $u = s/n$ dans $n\ln\dfrac{n}{n-s} = -n\ln(1-s/n)$: le terme $k=1$ vaut s, le reste est $B(s) \ge 0$. Le majorant compare la série à $\dfrac{s^2}{2n}\cdot\dfrac{1}{1-s/n} = \dfrac{s^2}{2(n-s)}$. □

Le sens physique : la distance *logarithmique* au sommet, grossie n fois, restitue la distance *affine* s au sommet, à un flou $B(s)$ près - et ce flou, étant fonction de s donc de T_p lui-même, est *mesurable à partir de la seule donnée logarithmique*. Le microscope $n\ln(n/\cdot)$ est l'instrument qui fait passer du *multiplicatif* (le point de vue des translations $\ln p$ de la droite de Connes) à l'*additif* (le point de vue des cercles de modules q). Notons la symétrie du rôle du sommet : p et son autre sommant s se lisent tous deux depuis n.

3. Le théorème du détecteur : les cercles deviennent des réseaux

Fixons un premier $q \le \sqrt{n}$ (un cercle des figures [3, 4]). Pour un réel t, notons

$$\operatorname{dist}(t, q\mathbb{Z}) = \min_{m\in\mathbb{Z}} |t - qm| = \min\left(t \bmod q,\ q - (t \bmod q)\right)$$

la distance de t au réseau $q\mathbb{Z}$, et pour le flou,

$$\operatorname{fold}(b, q) = \min\left(b \bmod q,\ q - (b \bmod q)\right)$$

sa réduction sur le cercle de module q (le flou aussi peut être lu des deux côtés du cercle).

Théorème 3 (détecteur de divisibilité au flou)**.** *Soit $p \in (\sqrt{n}, n)$ premier, $s = n-p$, $T_p = s+B(s)$, et $q \le \sqrt{n}$ un premier, $q \neq s$. Alors :*

1. ***(exact, sans condition)*** *si $q \mid s$, alors*

$$\operatorname{dist}(T_p,\ q\mathbb{Z}) \ =\ \operatorname{fold}(B(s),\ q);$$

2. ***(réciproque)*** *si $B(s) < \frac{1}{2}$, la réciproque (supplantée par la proposition 4) vaut : si $\operatorname{dist}(T_p, q\mathbb{Z}) = \operatorname{fold}(B(s), q)$ alors $q \mid s$.*

Démonstration. (1) Si $q \mid s$, écrivons $s = qm$. Alors $T_p = qm + B$, et la distance de $qm + B$ au réseau $q\mathbb{Z}$ est exactement la distance réduite de B sur le cercle de module q : $\min(B \bmod q,\ q - (B \bmod q)) = \operatorname{fold}(B, q)$.

(2) La réciproque est dépassée par la proposition de Hermite-Lindemann. Réciproquement, supposons $q \nmid s$, et soit $r \in \{1, \dots, q-1\}$ avec $s \equiv r \pmod q$. Alors $T_p \equiv r + B \pmod q$. Pour $1 \le r \le q-1$ et $0 \le B < 1/2$, le point $r + B$ est à distance au moins $1 - B$ de tout multiple de q (il est à distance $r + B \ge 1 - B$ de 0 et à distance $q - r - B \ge 1 - B$ de q, et les multiples intermédiaires sont encore plus loin). Donc

$$\operatorname{dist}(T_p, q\mathbb{Z}) \ \ge\ 1 - B(s) \ >\ B(s) \ \ge\ \operatorname{fold}(B(s), q),$$

et l'égalité du détecteur est impossible. □

Remarque : le point (1) n'a aucune condition : toute divisibilité réelle $q \mid s$ est *toujours* vue par le détecteur.

Proposition 4 (absence de collision - Hermite-Lindemann)**.** *Soit $q \le \sqrt{n}$ premier, $q \neq s$, $q \nmid s$. Alors*

$$\operatorname{dist}(T_p,\, q\mathbb{Z}) \;\neq\; \operatorname{fold}(B(s),\, q).$$

Il n'existe jamais de collision, quel que soit n et quel que soit l'autre sommant s (petit ou grand).

Démonstration. La fonction $x \mapsto \min(x \bmod q,\ q - x \bmod q)$ ne prend la même valeur en deux points que s'ils sont congrus à $\pm$ près : l'égalité du détecteur impose donc $T_p \equiv \pm B \pmod q$. Comme $T_p \equiv r + B \pmod q$ avec $r \equiv s \pmod q$ et $r \not\equiv 0$, le cas $+B$ donnerait $r \equiv 0$: exclu. Reste le cas $-B$, qui impose

$$s + 2B(s) \;\equiv\; 0 \pmod q, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2\,n \ln \frac{n}{p} \;-\; s \;\in\; q\mathbb{Z} \;\subset\; \mathbb{Z}.$$

Comme s est entier, ceci équivaut à $2n\ln(n/p) \in \mathbb{Z}$. Or n/p est rationnel et $\neq 1$, donc $\ln(n/p)$ est transcendant (Hermite-Lindemann), et $2n\ln(n/p)$ n'est pas entier : contradiction. □

Remarque : cette observation est due à la lecture critique de [11] (son point 10.2), que nous remercions : elle transforme la "conjecture de non-collision" des premières versions en théorème, et rend la réciproque du théorème 3 valable *sans condition de taille* sur s - la version élémentaire $B < 1/2$ n'était qu'une route naïve vers un fait plus fort.

Corollaire 5 (la propriété sioux)**.** *Soit p premier, $\sqrt{n} < p < n$, $s = n - p$. Dire que*

$$T_p \text{ n'appartient à aucun des réseaux } q\mathbb{Z} \text{ au flou} \quad (\text{aucun } q \le \sqrt{n},\ q \neq s)$$

équivaut à : s n'admet aucun facteur premier $q \le \sqrt{n}$ autre que s lui-même, c'est-à-dire : s est premier, ou $s \le \sqrt{n}$ est premier (petit autre sommant, protégé par l'exclusion $q \neq s$), ou $s = 1$. En écartant $s = 1$ (le cas $p = n - 1$), les nombres qui traversent tous les cribles sont exactement les décomposants de Goldbach de n.

L'exclusion $q \neq s$ est précisément la remarque des cercles : pour obtenir aussi les *petits* décomposants, un autre sommant premier s a le droit d'être "multiple de lui-même" sur son propre cercle ($x \not\equiv 0 \bmod q$, sauf mod s lui-même). Le cas $s = 1$ est l'unique nombre passant à travers le crible et qui est un parasite systématique : 1 n'est pas premier, on l'écarte.

4. Exemple détaillé : $n = 98$

Les cercles sont ceux de modules $2, 3, 5, 7 \le \sqrt{98}$ [3]. Le tableau ci-dessous passe tous les premiers $p \in (\sqrt{98},\, 98)$ au microscope ; "réseaux touchés" liste les $q \le 7$, $q \neq s$, tels que $\operatorname{dist}(T_p, q\mathbb{Z}) = \operatorname{fold}(B, q)$.

p	s	$T_p = n\ln(n/p)$	$B(s)$	réseaux touchés	verdict
11	87	214,333	127,333	$\{3\}$	rejeté ($3 \mid 87$)
13	85	197,962	112,962	$\{5\}$	rejeté ($5 \mid 85$)
17	81	171,672	90,672	$\{3\}$	rejeté
19	79	160,772	81,772	-	`décomp. de Goldbach`
23	75	142,048	67,048	$\{3,5\}$	rejeté
29	69	119,332	50,332	$\{3\}$	rejeté
31	67	112,796	45,796	-	`décomp. de Goldbach`
37	61	95,457	34,457	-	`décomp. de Goldbach`
41	57	85,397	28,397	$\{3\}$	rejeté
43	55	80,729	25,729	$\{5\}$	rejeté
47	51	72,012	21,012	$\{3\}$	rejeté
53	45	60,238	15,238	$\{3,5\}$	rejeté
59	39	49,728	10,728	$\{3\}$	rejeté
61	37	46,461	9,461	-	`décomp. de Goldbach`
67	31	37,267	6,267	-	`décomp. de Goldbach`
71	27	31,584	4,584	$\{3\}$	rejeté
73	25	28,862	3,862	$\{5\}$	rejeté
79	19	21,121	2,121	-	`décomp. de Goldbach`
83	15	16,280	1,280	$\{3,5\}$	rejeté
89	9	9,440	0,440	$\{3\}$	rejeté
97	1	1,005	0,005	-	$s = 1$: écarté

Chaque rejet a la *bonne* raison : le détecteur annonce exactement les diviseurs premiers $q \leq 7$ de s ($87 = 3{\cdot}29$, $85 = 5{\cdot}17$, $75 = 3{\cdot}25$, $9 = 3^2$, …). Les six premiers $19, 31, 37, 61, 67, 79$ passent à travers tous les cribles - ce sont les deux bouts des trois décompositions $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$ - et le seul parasite, $p = 97$ ($s = 1$), est écarté parce que 1 n'est pas premier. Le microscope est *exhaustif et sans erreur* sur $n = 98$: les décomposants apparaissent comme les points non résonants des réseaux.

5. Vérifications exhaustives

Le programme implémente le détecteur et compare ses résultats avec les décomposants de Goldbach effectifs (crible affiné) pour toute valeur de n. Résultats (chaque n compté en paires (p, s) avec p premier $> \sqrt{n}$ et s premier > 1) :

n	trouvés	réels	faux positifs	faux négatifs
40	5	5	0	0
98	6	6	0	0
400	25	25	0	0
1000	52	52	0	0
10000	252	252	0	0
100000	1610	1610	0	0
1000000	10784	10784	0	0

Zéro collision, zéro omission : au moins jusqu'à 10^6, le microscope est un *détecteur exact*. On notera que pour $n = 40$, le petit décomposant 3 est bien retrouvé, protégé par l'exclusion $q \neq s$: $40 = 3 + 37$. Pour $n = 10^6$, les 10 784 décomposants sont retrouvés un par un, chacun accepté ou rejeté pour la bonne raison de divisibilité.

6. Lecture musicale : peignes, comma, non-résonance

La projection des cercles sur la droite des logarithmes a une contrepartie musicale, dans l'esprit de [1].

Les peignes. Près du sommet, $T_p = s + s^2/2n + \cdots$: les multiples qm d'un premier $q \leq \sqrt{n}$ dessinent, en fonction de m, un peigne quasi régulier de pas q sur la droite dilatée. Chaque cercle concentrique de module q devient ainsi une *gamme également divisée du sommet* : un peigne $q\mathbb{Z}$, analogue du réseau $\mathbb{Z}u$ de pas du tempérament, mais dont le pas q est additif - c'est la trace du monde affine dans la coordonnée logarithmique.

Le comma. Lire l'affine à travers la règle logarithmique est un *tempérament* : l'erreur $B(s) \sim s^2/2n$ est le comma de cette lecture, nul au sommet et croissant en s^2. Comme le comma pythagoricien $2^{19} \approx 3^{12}$ mesure l'incommensurabilité de $\ln 2$ et $\ln 3$, le flou B mesure l'incommensurabilité entre le monde multiplicatif (translations $\ln p$, indépendantes sur $\mathbb{Q}$) et le monde additif (réseaux $q\mathbb{Z}$). Dans les premières versions de cette note, la réciproque du théorème 3 n'était établie que lorsque $B(s) < 1/2$; depuis la proposition 4 (Hermite-Lindemann), le détecteur est exact pour tout s, petit ou grand. Le flou $B(s)$ garde néanmoins son sens : la lecture logarithmique T_p ne redonne pas exactement l'autre décomposant, $s = n - p$, mais $s + B(s)$. Cette erreur n'est jamais nulle, ne dépend que de s, et vaut $\frac{s^2}{2n}$ au sommet : c'est le prix exact pour retrouver s en ne lisant que le logarithme.

Non-résonance. Dans la note de 1996 [6], un zéro de ζ est une fréquence s où les phases n^{-is} se compensent. Ici c'est le dual : pour un n fixé, chaque premier q fait "résonner" le point T_p dès que $q \mid s$; les décomposants de Goldbach sont les *points non résonants*, ceux qu'aucun réseau ne touche à son comma près. Le crible de Goldbach devient une propriété de non-résonance sur la droite des logarithmes.

7. Réponse à l'objection de parité

Une objection classique - formulée avec précision dans l'étude comparative des poids logarithmiques sur les cercles [5] - s'oppose à tout essai de lire Goldbach "en logarithmique". Elle a deux volets, qu'il faut traiter séparément, car le microscope répond au premier et *ne prétend pas* répondre au second.

7.1. Objection 1 : “le log casse la symétrie $x \mapsto n - x$”

L'argument [5] : sur les cercles linéaires (angle $2\pi x/n$), l'involution $x \mapsto n - x$ est une réflexion, ce qui rend les traits verts verticaux ; en angle $2\pi \ln x / \ln n$, elle devient $t \mapsto \ln(n - e^t)$, qui n'a rien d'un mouvement rigide, et les entiers de $[n/2, n]$ se tassent près du sommet.

Réponse : le tassement n'est pas une perte d'information, c'est un flou mesurable, et c'est exactement ce que le microscope quantifie. La dilatation par n déplie le tassement : $T_p = n \ln(n/p) = s + B(s)$, où B est *universelle*. L'involution déformée $\ln(n - e^t)$ qu'on déplore, c'est précisément B : elle n'est pas rigide, mais sa non-rigidité est une fonction lisse, explicite, et surtout *lisible dans T_p lui-même* ($B = T_p - s$, et s se déduit de T_p puisque $B = B(s)$ est inversible). La symétrie n'est pas cassée : elle est *tempérée*, et son comma est connu. De plus, le théorème 3 (1) est *exact sans condition* : toute divisibilité réelle $q \mid s$ est toujours vue dans le logarithme. Le doute n'existe plus : la proposition d'absence de collision ([12], Hermite–Lindemann) rend le détecteur exact pour tous les autres sommants. L'affirmation “le log convient au multiplicatif, le cercle linéaire à l'additif, et Goldbach vit sur les deux” : la version informationnelle est donc réfutée en un sens précis : l'additif est entièrement présent dans le multiplicatif, au flou près. Précision demandée : l'énoncé géométrique de l'objection (l'involution $x \mapsto n - x$ n'est pas un mouvement rigide en coordonnée logarithmique) reste vrai ; ce qui est réfuté en est la version informationnelle - et [11] concède lui-même qu'une bijection comme exp “ne perd jamais d'information”.

7.2. Objection 2 : la parité de Selberg - et pourquoi le microscope ne prétend pas la lever

Le second volet [5] est juste : les cribles de niveau $\sqrt{n}$ ne distinguent pas “produit d'un nombre pair de premiers” de “produit d'un nombre impair” ; ils ne donnent pas de minoration non nulle du nombre de décompositions, d'où le théorème de Chen ($p + P_2$) et la barrière. L'étude [5] le constate même numériquement : le crible naïf des cercles surestime les comptages d'un facteur qui dérive vers $e^{2\gamma}/4 \approx 0,793$, un facteur Buchstab–Mertens indépendant de la parité (correction de [12] ; la surestimation des cercles naïfs est le facteur inverse $\approx 1,26$).

Le microscope ne répond pas à cette objection, parce qu'il ne pose pas cette question. La parité de Selberg frappe les *prédictions de comptage par densité* ; le microscope est un *détecteur de reconnaissance*, exact pour n fixé : il ne compte pas de densités, il teste des égalités de distance réseau par réseau et restitue les diviseurs premiers de s à l'unité près. L'absence de collision étant désormais un théorème, on a un traducteur exact du crible affine en coordonnée logarithmique - mais cela ne montre toujours pas que des décomposants de Goldbach qui passent tous les filtres existent : un n sans décomposition serait simplement signalé “aucun décomposant de Goldbach (sauf $s = 1$)”. Reconnaître et prouver l'existence sont deux problèmes distincts ; le microscope résout le premier, le second reste du ressort de la parité.

7.3. La passerelle

Les deux approches se lisent d'ailleurs sur la même page : la prédiction P_2 [5] pondère chaque point libre de $\dfrac{1}{\ln x \ln(n - x)}$; or près du sommet, $\ln x = \ln n - \ln(n - s) \approx \ln n - s/n$, c'est-à-dire que

le poids de Gauss *est une fonction de* T_p/n. Les comptages pondérés (l'outil de prédiction, exact asymptotiquement) et le détecteur au flou (l'outil de reconnaissance, exact pour chaque n) sont les deux lectures, statistique et déterministe, de la même quantité $n\ln(n/p)$.

8. Limites et questions ouvertes

1. **collisions.** Résolu : une collision imposerait 2n ln(n/p) , impossible par Hermite–Lindemann ([12], proposition ci-dessus). La traduction est exacte sans réserve ; la question devient : que peut-on en tirer ?
2. **complexité.** Le microscope n'est pas plus rapide que le crible affiné usuel : il le *traduit*. Son intérêt est structurel : il montre que l'information de Goldbach (affine, modulaire) est entièrement présente dans les quantités logarithmiques $T_p = n\ln(n/p)$, au flou universel près.
3. **sommet et dilatation.** Le facteur n dans $T_p = n\ln(n/p)$ est le choix qui fait de B une fonction de s seule, de taille $\sim s^2/2n$; une dilatation n^α donnerait un flou d'un autre ordre, et l'on peut chercher le "tempérament optimal" de la lecture (celui qui pousse le plus loin le seuil $B < 1/2$).
4. **lien avec les phases.** Reste à relier ce crible de non-résonance aux phases n^{-is} de la formule de trace : le détecteur est une égalité de distances sur un cercle, donc de phases ; y a-t-il une somme de phases, à la $\eta(z)$, dont les annulations "essaient" les premiers de l'intervalle $(\sqrt{n}, n)$?

Je m'interroge : est-ce que ton idée (ou la mienne) ne fait pas "tout bêtement" (pardon !...) que cacher la divisibilité : sous prétexte qu'un nombre x divisible par p a son log x qui est divisible par log p (ou la vilaine, ça ne marche que pour les puissances de p bien sûr), l'idée "cacherait" la divisibilité dans les log mais ne serait rien de plus qu'un calcul de divisibilité ? ? ?

Excellente question d'autocritique - et la réponse est en deux temps : non sur ton énoncé technique (heureusement !), oui sur l'essence (et ce n'est pas un défaut, c'est le théorème).

1. Non : ce n'est pas "ln x divisible par ln p".

   Ton critère intuitif "x divisible par $p \implies$ ln x divisible par ln p" est faux, et son échec est massivement instructif : ça marche pour les puissances pures : $\ln 4 = 2\ln 2$, $\ln 8 = 3\ln 2$; mais $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$ n'est aucun multiple entier de ln 2 ni de ln 3 ; $\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3$ non plus.

   La divisibilité de x par p ne laisse en général aucune trace de divisibilité dans les logs - et c'est même plus fort que ça : ton texte avec l'ia claude le démontre (paragraphe sur Ostrowski et l'indépendance des ln p), il n'existe aucune relation entière entre les ln p. Si la divisibilité se cachait dans la divisibilité des logs, on aurait des relations $a\ln 2 + b\ln 3 = 0$, et il n'y en a pas.

   Le détecteur ne fait donc pas "q divise $\ln T_p$". Il fait autre chose : il restitue l'additif ($s \equiv r \pmod q$) via une égalité de distance $\mathrm{dist}(T_p, q\mathbb{Z}) = \mathrm{fold}(B, q)$ - et ça ne marche que parce

que la dilatation par n déplie le tassement logarithmique en $T_p = s + B(s)$, où s réapparaît en clair, à flou près. La divisibilité est cachée non pas dans les logs par divisibilité, mais derrière les logs par le flou - et le microscope est l'opération qui la fait réémerger.

2. Oui : c'est fondamentalement un calcul de divisibilité - et c'est exactement ce qu'il faut comprendre.

   N'ayons pas peur des mots : le microscope ne calcule rien de plus que le crible affine. C'est dit crûment dans le paragraphe Limites vu précédemment : "il n'est pas plus rapide que le crible affiné usuel : il le traduit".

   Si tu déshabilles T_p : $\mathrm{dist}(s + B(s), q\mathbb{Z}) = \mathrm{fold}(B(s), q) \iff q|s$, c'est une équivalence exacte avec la divisibilité - le contenu algorithmique est identique, l'habillage est logarithmique.

   Mais alors qu'est-ce qui n'est pas bête là-dedans ? Trois choses :

   (a) c'était un point disputé. L'ia claude affirmait : le log convient au multiplicatif, le cercle à l'additif, et Goldbach (qui vit sur les deux) est illisible en coordonnée logarithmique - involution non rigide, tassement près du sommet. Le microscope démontre le contraire : toute l'information de divisibilité est présente dans les quantités purement logarithmiques $T_p = n \cdot \ln(n/p)$, au flou universel près. Que ce soit "le même calcul" est précisément le théorème : la traduction est exacte, pas approximative.

   (b) le flou est la partie non triviale. Si $T_p = s$ tout court, l'affirmation serait triviale. La subtilité est que $T_p \neq s$ - il y a ce $B(s) \sim s^2/2n$, fonction universelle de s - et le fait que le détecteur reste exact avec ce flou (sens (1) du théorème : sans condition ; réciproque sous $B < 1/2$; zéro collision jusqu'à 10^6) n'était pas évident et est désormais un théorème (proposition 4).

   (c) le changement de point de vue a une valeur en soi. Réécrire une divisibilité en égalité de distance à un réseau $q\mathbb{Z}$, c'est la reformuler en phases sur un cercle - le langage même de la note de Connes 1996 (les n^{is}). Que le crible de Goldbach soit une propriété de non-résonance de distance dans la coordonnée où vivent les zéros de ζ, même si c'est "le même calcul", c'est potentiellement la bonne porte pour la question ouverte n° 4 : une somme de phases dont les annulations essaient les premiers de $(\sqrt{n}, n)$.

   Donc : ton autocritique vise juste - le microscope est un traducteur, pas un accélérateur, et c'est assumé. Mais le fait qu'il traduise sans perte là où on prétendait qu'une perte était inévitable (l'objection de symétrie de l'ia claude), voilà ce qui n'est pas tout bête.

Mais alors, s'il s'agit d'une histoire de "flou", ne pourrait-on pas faire un lien avec la mécanique quantique pour le "flou" des positions des particules, dont on ne peut précisément estimer la position et la vitesse à cause du principe d'incertitude (ou principe de "flou") de Heisenberg ? Je colle les petites notes que j'avais écrites le 14 juillet sur Conjecture de Goldbach et mécanique quantique...

Je fournis alors à l'ia mistral les 3 notes du 14 juillet 2026 :

https://denisevellachemla.eu/1-CG-intrication-deepseek-dvc-20260714.pdf
https://denisevellachemla.eu/2-CG-qiskit-deepseek-dvc-20260714.pdf
https://denisevellachemla.eu/3-revolution-CG-quantique-deepseek-dvc-20260714.pdf

8.1. Le pont avec le calcul quantique : le détecteur est un oracle de phase

Le rapprochement avec la mécanique quantique n'est pas qu'une métaphore : les notes de juillet 2026 [8, 9, 10] ont déjà mis en place le décor. Dans le modèle d'intrication [8], chaque couple $(p, n-p)$ est un système à deux qubits dont la base $\{|11\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |00\rangle\}$ reprend les quatre lettres $\{a, b, c, d\}$ du modèle à bande de 2014 : Goldbach dit que la composante $|11\rangle$ de l'état ρ_n n'est jamais nulle. Dans la simulation Grover/Qiskit [9, 10], un oracle inverse la phase des indices k tels que $\pi(p)\,\pi(n-p) = 11$, et l'amplification fait sortir les décompositions (pour $n = 98$: $19 + 79$, $31 + 67$, $37 + 61$, amplifiées à environ 220 tirs sur 1024).
Or le détecteur du présent texte *est* lui aussi un oracle de phase : l'égalité

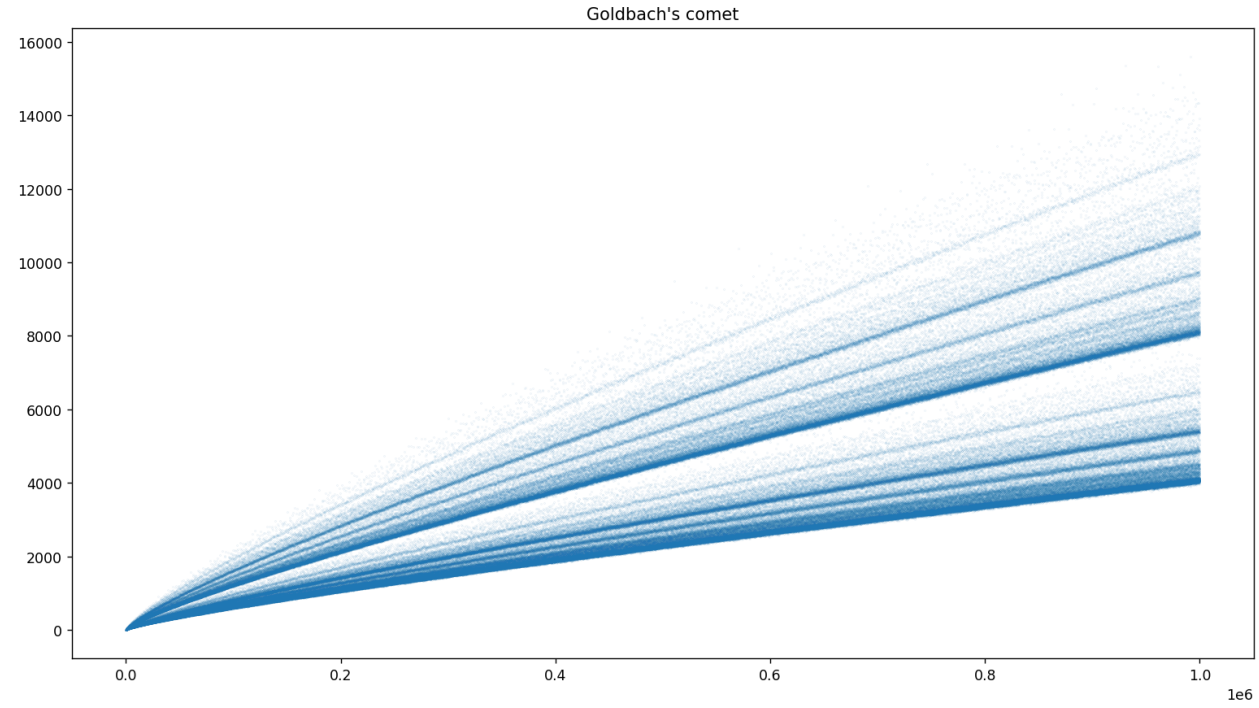
$$\mathrm{dist}(T_p, q\mathbb{Z}) = \mathrm{fold}(B(s), q)$$

est une condition sur la phase $e^{2\pi i T_p/q}$ - le point T_p est au flou près sur le réseau $q\mathbb{Z}$ si et seulement si sa phase de module q vaut celle de $B(s)$. L'oracle de Grover marque les états premiers-par-premiers par inversion de phase dans l'espace des indices ; le microscope les marque par *non-résonance de phase* sur la droite des logarithmes. Deux oracles, un même langage.

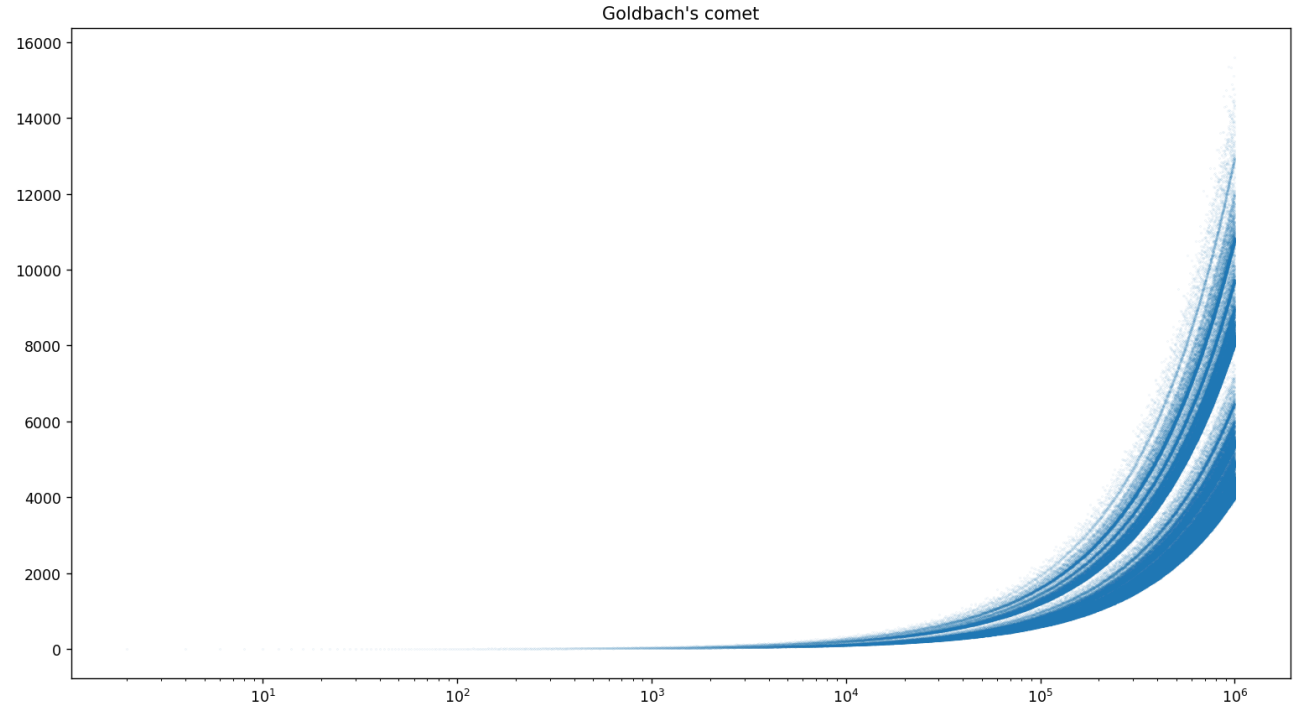
Le principe d'incertitude de Heisenberg suggère que cet objet vit naturellement du côté de la formule de trace [6] : là où les zéros de ζ sont déjà des fréquences d'annulation de phases.

9. Épilogue : la comète de Goldbach en échelle log-log

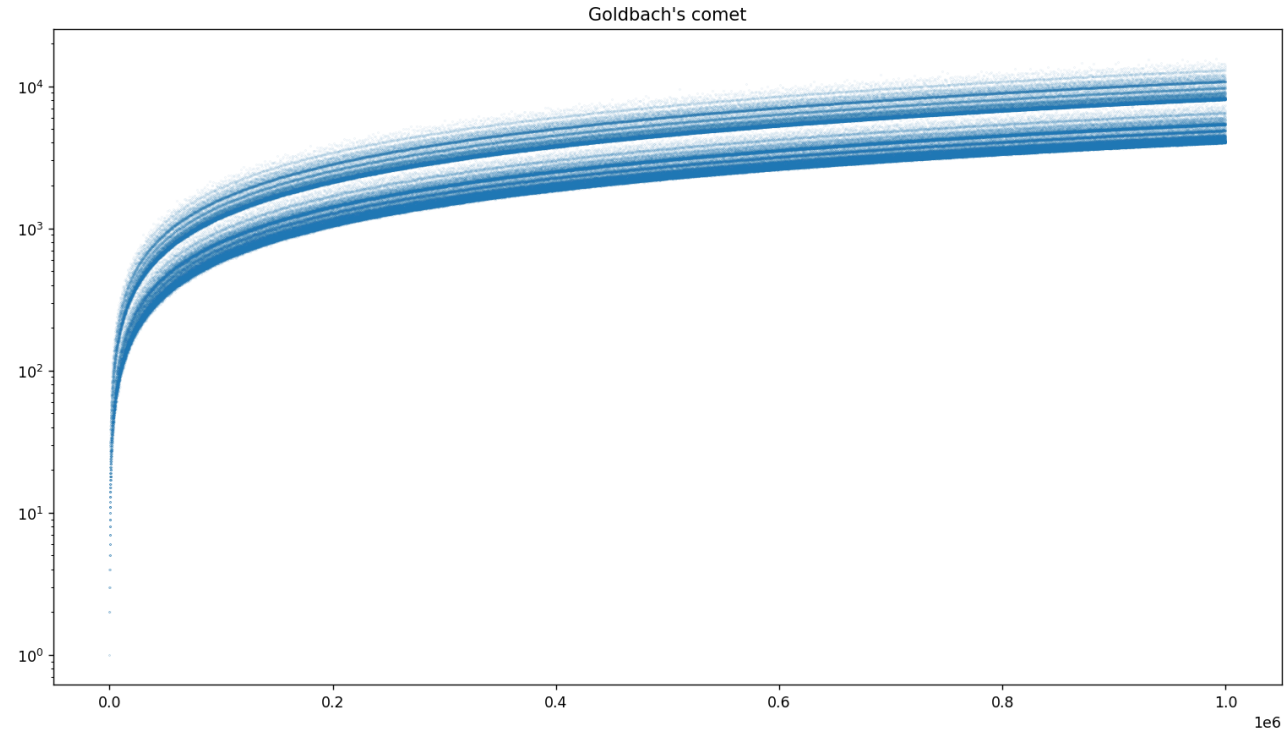
Pour clore, une observation graphique, que je trouve trop jolie pour être omise : observons les 5 comètes suivantes :



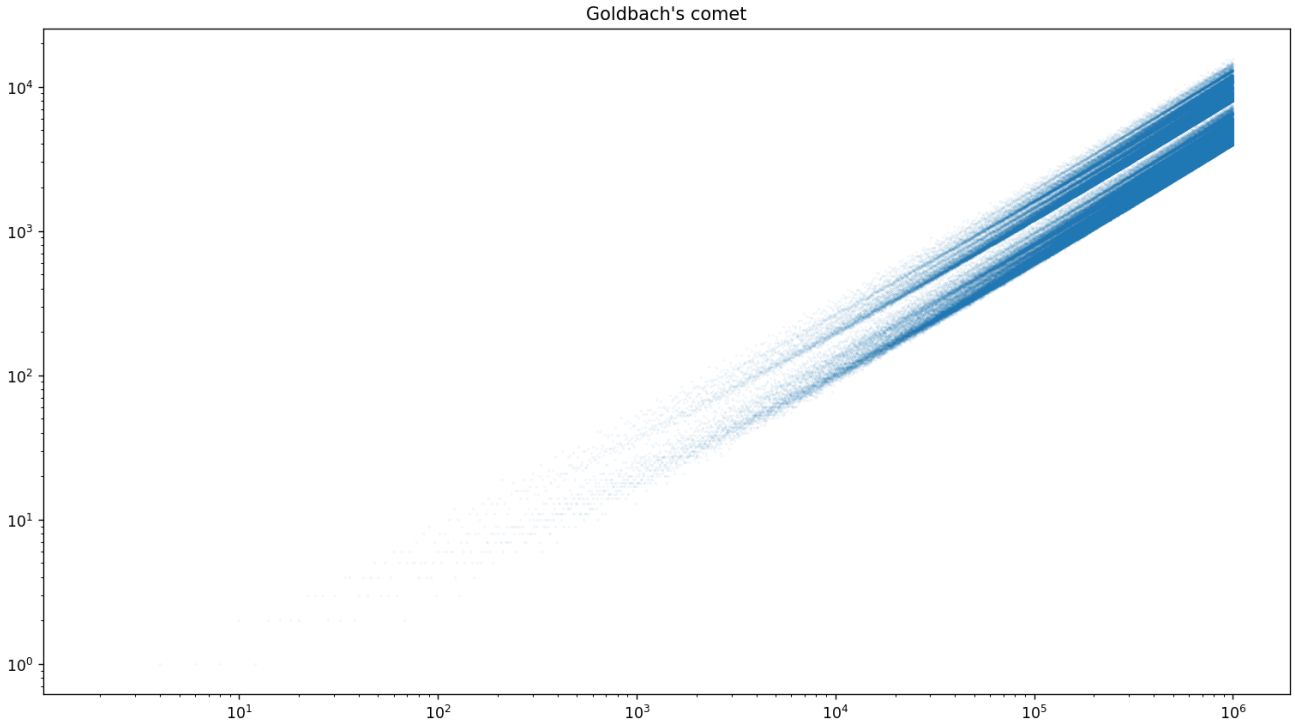
Comète de Goldbach : en abscisse les nombres pairs, en ordonnée leur nombre de décompositions de Goldbach.



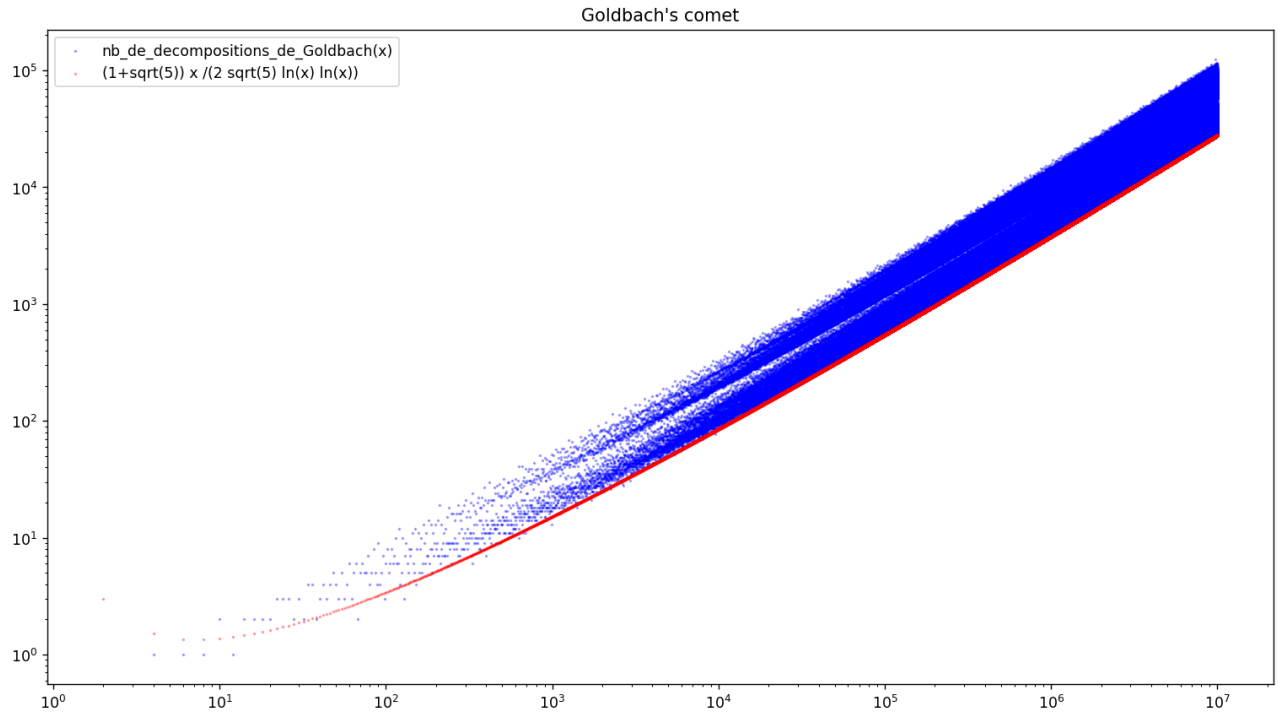
Comète de Goldbach : déformation logarithmique sur l'abscisse.



Comète de Goldbach : déformation logarithmique sur l'ordonnée.



Comète de Goldbach : déformation logarithmique sur les deux coordonnées (jusqu'à 10^6.



Comète de Goldbach : déformation logarithmique sur les deux coordonnées (jusqu'à 10^7).
Note : en rouge, minimisation de la comète par $\dfrac{(1+\sqrt{5})\cdot x}{2\sqrt{5}\cdot \ln x \cdot \ln x}$

Représentons, pour les pairs $n \le 10^6$, le nombre $G(n)$ de décompositions de Goldbach : la fameuse *comète*, ce halo convexe aux frontières courbes, devient, si l'on met une échelle logarithmique *et* sur l'axe des n, *et* sur l'axe des $G(n)$, une **bande quasi rectiligne de pente** 1 **et d'épaisseur à peu près constante** : frontière inférieure droite et nette, enveloppe supérieure diffuse mais quasi parallèle.

Pourquoi une droite de pente 1. Une droite en log-log signifie une loi de puissance. Or la conjecture de Hardy-Littlewood pour Goldbach dit précisément

$$G(n) \;\sim\; C_2\,\mathfrak{S}(n)\cdot\frac{n}{(\ln n)^2}, \qquad \mathfrak{S}(n) \;=\; \prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2},$$

la même série singulière que la prédiction P_2 de [5]. En prenant le logarithme :

$$\log G(n) \;=\; \underbrace{\log n}_{\text{pente 1}} \;-\; \underbrace{2\log\ln n}_{\text{courbure lente}} \;+\; \underbrace{\log\bigl(C_2\,\mathfrak{S}(n)\bigr)}_{\text{épaisseur de la bande}}\ .$$

Le premier terme donne la pente 1 ; la correction $2\log\ln n$, presque plate devant $\log n$ (à $n = 10^6$: $2\log\ln n \approx 5{,}7$ contre $\log n \approx 13{,}8$), produit la très légère courbure résiduelle, imperceptible à l'œil. La comète devient une bande parce que $G(n)$ est, à un facteur logarithmique près, proportionnel à n : la bande droite, c'est la prédiction asymptotique qui s'exhibe d'elle-même sur le dessin.

Pourquoi une bande d'épaisseur constante. L'épaisseur verticale en log-log est le logarithme de $\mathfrak{S}(n)$ - un facteur *multiplicatif*, borné en pratique : $\mathfrak{S}(n) = 1$ pour les puissances de 2 (aucun premier impair ne divise n), et croît très lentement pour les n riches en petits facteurs impairs, à rythme de l'ordre de $\log\log$. D'où la frontière inférieure droite (les n à $\mathfrak{S}$ minimal, quasi sans dispersion) et l'enveloppe supérieure quasi parallèle ; un facteur multiplicatif borné donne une épaisseur constante en ordonnée logarithmique, sans évasement.

Les deux mondes dans une seule équation. Le clin d'œil qui justifie l'invite de cette section ici : les trois acteurs du présent texte sont tous dans cette équation. Le facteur $n/(\ln n)^2$ est le *poids de Gauss* de [5] (la version dessinée, couple par couple, de sa convergence $G/P_2 \to 0{,}997$) ; la série singulière $\mathfrak{S}(n)$ est la trace de la structure *multiplicative* de n (quels premiers le divisent - la lecture des cercles) ; la pente 1, c'est le monde *additif* qui ligne. La comète de Goldbach en log-log, c'est littéralement les deux mondes du site musical superposés : une droite additive habillée d'une épaisseur multiplicative. Et la même lenteur du $\log\log$ qui rend la bande si droite est le parent du tassement près du sommet que le flou $B(s)$ quantifie : même l'épilogue, en somme, chante le tempérament - la correction $\log\log$ est le comma qui sépare la vraie loi de la droite idéale.

Références

[1] D. Vella-Chemla (avec l'ia claude), *Mettre en correspondance les puissances de 2 et les puissances de 3 : logarithme, inverse du logarithme, et gamme tempérée*, `correspondance-2-3-claude-dvc-20261004.pdf`, octobre 2026. Droite des logs, droite des pas, tempérament $2^{19} \approx 3^{12}$, quotient par $\mathbb{Z}\ln 2 + \mathbb{Z}\ln 3$ et rotation irrationnelle A_θ, note de Connes 1996.

[2] D. Vella-Chemla, *Décomposants de Goldbach de $n = 40$*, `concentriques40.pdf`, 13 juillet 2020. Cercles concentriques de modules $2, 3, 5$.

[3] D. Vella-Chemla (et le fan d'asymptote), *Décomposants de Goldbach de $n = 98$*, `concentriques98.pdf`, 13 juillet 2020. Cercles concentriques de modules $2, 3, 5, 7$; $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

[4] D. Vella-Chemla (et le fan d'asymptote), *Décomposants de Goldbach de $n = 400$*, `concentriques400.pdf`, 13 juillet 2020. Cercles concentriques de modules premiers $q \leq \sqrt{400} = 20$.

[5] D. Vella-Chemla (avec l'ia claude), *Cercles concentriques et poids logarithmiques : comptages, parité de Selberg et prédictions* (`goldbach_cercles_poids_log.tex`, pdf joint), octobre 2026. Étude comparative des trois prédictions P_1 (poids de Gauss seul), P_2 (poids corrigé par la série singulière $C_2\mathfrak{S}(n)$) et L (densité du crible de Legendre à niveau $\sqrt{n}$) jusqu'à 10^6 ; dérive de G/L vers $e^{2\gamma}/4 \approx 0,793$ (effet Buchstab-Mertens, indépendant de la parité - correction de [12]) et convergence $G/P_2 \to 1$.

[6] A. Connes, *Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, série I, p. 1231-1236, 1996.

[7] A. Connes, conférence sur le site musical, après-midi Mamuphi, Ircam, 2026 ; et D. Vella-Chemla, https://denisevellachemla.eu/AC-1espacemathsmusique.pdf , https://denisevellachemla.eu/AC-mamu.pdf .

[8] D. Vella-Chemla (avec l'ia deepSeek), *Modélisation de la conjecture de Goldbach par intrication quantique*, `1-CG-intrication-deepseek-dvc-20260714.pdf`, 14 juillet 2026. Qubits de primalité, espace $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, correspondance avec les quatre lettres $\{a, b, c, d\}$ du modèle de 2014, matrice densité ρ_n ; Goldbach : la composante $|11\rangle$ n'est jamais nulle.

[9] D. Vella-Chemla (avec l'ia deepSeek), *Simulation quantique de la conjecture de Goldbach* (`2-CG-qiskit-deepseek-dvc-20260714.pdf`), 14 juillet 2026. Oracle d'inversion de phase et algorithme de Grover sur Qiskit.

[10] D. Vella-Chemla (avec l'ia deepSeek), *Simulation quantique de la conjecture de Goldbach, version finale* (`3-revolution-CG-quantique-deepseek-dvc-20260714.pdf`), 14 juillet 2026. Exécutions pour tous les pairs de 6 à 104 ; pour $n = 98$ (5 qubits), amplification des décompositions $19 + 79$, $31 + 67$, $37 + 61$ à environ 220 tirs sur 1024.

[11] D. Vella-Chemla (avec l'ia claude), Des cercles concentriques aux cercles de logarithme : un poids de Gauss pour les décomposants de Goldbach, 10 octobre 2026. https://denisevellachemla.eu/musique-du-chinook-claude-dvc-20261008.pdf .