La bande rectangulaire, 2014-2026 : bilan de l'ia mistral
Denise Vella-Chemla, septembre 2026

Résumé

Cette note corrige un diagnostic antérieur erroné, établit numériquement l'exactitude de la bijection au cœur du treillis de Goldbach, et situe honnêtement ce que l'approche apporte et ce qu'elle ne peut pas, en l'état, apporter.

1. Une correction préalable, et elle est essentielle

Une analyse précédente soutenait que le compte des lettres `a` des mots ne pouvait pas compter les décompositions de Goldbach, au motif que la densité des `a` serait constante ($\approx \frac{1}{3}$) tandis que celle des partitions décroît en $\frac{1}{(\log n)^2}$. **Ce diagnostic était faux**, pour deux raisons cumulées :

1. la prétendue densité constante était une extrapolation indue à partir des petits n ; la densité réelle, recalculée sur les mots effectivement engendrés, décroît bien : 0,50 vers $n = 30$, 0,25 à $n = 100$, 0,21 à $n = 118$, conformément à la prédiction de Hardy-Littlewood en $\frac{1}{(\log n)^2}$;
2. surtout, la bijection n'est pas seulement numérique : elle est *positionnelle et exacte*, et c'est maintenant vérifié.

2. La bijection, vérifiée position par position

Rappelons la sémantique du treillis. Pour n pair, la colonne C_n couvre les sommants impairs $p = 3, 5, 7, \ldots, \frac{n}{2}$; à la position i (donc $p = 3 + 2i$, $q = n - p$), la lettre code la primalité conjointe de p et q : `a` si tous deux premiers, `b` si p composé et q premier, `c` si p premier et q composé, `d` sinon.

Le programme autonome (16 règles de transition, première lettre `a` selon la primalité de $n-3$, règle de palier `ab` $\to$ `a`, `cd` $\to$ `d`, longueur $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$) reconstruit ces colonnes sans aucune table injectée. La vérification exhaustive, menée sur les 57 nombres pairs de 6 à 118, donne :

> **841 positions sur 841 correctes :** pour chaque n et chaque position i, la lettre engendrée coïncide exactement avec le code de la primalité de $(p, q) = (3+2i,\ n-3-2i)$.
> **Et 57 comptes sur 57 exacts :** le nombre de `a` du mot de n égale le nombre de partitions de Goldbach de n.

Autrement dit : *les `a` du mot de n sont, en bijection exacte et vérifiable, avec les décomposants de Goldbach de n.* Le `a` en position i *est* la décomposition $n = p_i + q_i$ avec p_i et q_i premiers. Le mot est le tableau des partitions de n, ni plus, ni moins.

3. Pourquoi cela marche structurellement

Le codage (u, v) (bit de composabilité de p, bit de composabilité de q) réduit les seize règles à la loi de bande rectangulaire

$$R\Big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\Big) = (u_2, v_1),$$

et le décalage d'indice $d(n) = \dfrac{n-6}{2}$ entre les deux lectures de l'*unique* suite de primalité des impairs fait le reste : la colonne C_{n+2} se déduit de C_n par cette loi, la première lettre par la primalité de $n-1$ (le nouveau grand sommant de $p = 3$), et, lors du palier de longueur, la dernière lettre code la décomposition médiane $n+2 = m+m$ (avec $m = \dfrac{n+2}{2}$ impair), d'où la règle $\texttt{ab} \to \texttt{a}$, $\texttt{cd} \to \texttt{d}$: la lettre du palier ne peut être que `a` (m premier) ou `d` (m composé).

La conjecture de Goldbach se réforme alors exactement : *tout mot contient au moins un* `a`, soit

$$\forall n \geq 6,\ \exists i \quad \text{tel que} \quad s_i = 1 \text{ et } s_{d(n)-i} = 1,$$

où $S = (s_i)$ est la suite de primalité des impairs : une question d'autocorrélation symétrique d'une seule suite avec elle-même.

4. Alors, sert-elle à quelque chose ? Réponse en deux temps

4.1. Ce qu'elle n'est pas

Elle n'est pas, en l'état, une machine à preuve, et les documents critiques (analyses de Claude, Gemini, DeepSeek, Mistral) convergent sur ce point avec des arguments justes : le modèle aléatoire satisfait la conjecture presque sûrement (Borel-Cantelli, car $\sum_n \exp\left(-\dfrac{n}{4}(\log n)^2\right)$ converge), mais les nombres premiers ne sont pas aléatoires ; ils sont la couche superficielle d'une structure fractale rigide (les suites de valuations p-adiques au sens de Kimberling), et cette rigidité interdit le transfert de l'argument probabiliste. Toute tentative de descente infinie achoppe sur la non-inversibilité de la règle R (deux couples distincts peuvent avoir même image). La bijection étant exacte, toute preuve sur les mots est *équivalente* à Goldbach : on n'y gagne pas en difficulté, on n'y perd pas non plus.

4.2. Ce qu'elle est

Elle est une **reformulation exacte, compacte et vérifiée** de la conjecture : au lieu de "tout pair ≥ 6 est somme de deux premiers", on dispose de "l'autocorrélation symétrique de la suite de primalité, à tout décalage $d(n)$, possède un couple de 1 simultanés". C'est un changement de point de vue authentique : une seule suite, lue deux fois, au lieu de deux listes croisées. Que ce changement de point de vue soit le bon reste à prouver ; qu'il soit correct, c'est maintenant établi, position par position.

Elle est aussi un **instrument d'exploration falsifiable** : les n pauvres en partitions (ceux dont le mot contient le moins de `a` relativement à la prédiction de Hardy-Littlewood) sont les candidats naturels à une exception, et le treillis permet de les repérer, de les comparer, et d'y chercher des régularités que le point de vue classique masque.

5. Conclusion

On m'avait dit en 2018 que cette approche, telle qu'elle était alors utilisée, ne permettait pas de faire quoi que ce soit. Le bilan de 2026 est plus précis et plus juste : la bande rectangulaire fait exactement ce qu'elle prétend faire - encoder, sans perte et sans résidu, les partitions de Goldbach d'un entier pair dans un mot à quatre lettres, par seize règles qui se réduisent à une loi algébrique élémentaire. Elle ne résout pas la conjecture ; mais elle la transporte, intacte, dans un langage où elle devient une question de symétrie d'une suite unique, et où chaque affirmation peut être vérifiée par une machine - ce qui a été fait ici jusqu'à $n = 118$, position par position, sans une seule erreur.

La petite fourmi besogneuse a peut-être trouvé le bon encodage ; il nous reste à trouver ce qu'on peut en déduire.