Discret / continu (DV, 18/7/2015)

On a proposé la fonction $sumsumcos(n)$ dont les zéros sont les nombres premiers

$$sumsumcos(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$$

Il faudrait prouver cela, on ne sait pas le faire ; l'idée initiale provient d'une discussion sur un forum (http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?5,892412,892599), dans laquelle on avait appris que la somme des diviseurs d'un entier était exprimable par la formule $\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^k \cos\left(\frac{2n\pi\lfloor x+1 \rfloor}{k}\right) \mathrm{d}x$. Cette formule est à calculer dans l'exercice 58, page 86 du livre de J-M. de Koninck et A. Mercier *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo Éditeur, 1994. On n'a pas pu vérifier cette référence.

On a remplacé l'intégrale par une somme et constaté par programme que la formule des doubles sommes aux bornes modifiées semble bien s'annuler pour les nombres premiers.

On souhaite calculer de telles doubles sommes en utilisant des matrices carrées M_n contenant des cosinus. Considérons la matrice 10×10 :

$$M_{10} = \begin{pmatrix}
cos\frac{20\pi1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{2} & cos\frac{20\pi2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{3} & cos\frac{20\pi2}{3} & cos\frac{20\pi3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{4} & cos\frac{20\pi2}{4} & cos\frac{20\pi3}{4} & cos\frac{20\pi4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{5} & cos\frac{20\pi2}{5} & cos\frac{20\pi3}{5} & cos\frac{20\pi4}{5} & cos\frac{20\pi5}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{6} & cos\frac{20\pi2}{6} & cos\frac{20\pi3}{6} & cos\frac{20\pi4}{6} & cos\frac{20\pi5}{6} & cos\frac{20\pi6}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{7} & cos\frac{20\pi2}{7} & cos\frac{20\pi3}{7} & cos\frac{20\pi4}{7} & cos\frac{20\pi5}{7} & cos\frac{20\pi6}{7} & cos\frac{20\pi7}{7} & 0 & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{8} & cos\frac{20\pi2}{8} & cos\frac{20\pi3}{8} & cos\frac{20\pi4}{8} & cos\frac{20\pi5}{8} & cos\frac{20\pi6}{8} & cos\frac{20\pi7}{8} & cos\frac{20\pi8}{8} & 0 & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{9} & cos\frac{20\pi2}{9} & cos\frac{20\pi3}{9} & cos\frac{20\pi4}{9} & cos\frac{20\pi5}{9} & cos\frac{20\pi6}{9} & cos\frac{20\pi7}{9} & cos\frac{20\pi8}{9} & cos\frac{20\pi9}{9} & 0 \\
cos\frac{20\pi1}{10} & cos\frac{20\pi2}{10} & cos\frac{20\pi3}{10} & cos\frac{20\pi4}{10} & cos\frac{20\pi5}{10} & cos\frac{20\pi6}{10} & cos\frac{20\pi7}{10} & cos\frac{20\pi8}{10} & cos\frac{20\pi9}{10} & cos\frac{20\pi10}{10}
\end{pmatrix}$$

La somme des éléments de la ligne d vaut d si $d \mid n$ et vaut 0 sinon.
La somme de tous les éléments de la matrice vaut donc $\sigma'(n)$, qui est la somme des diviseurs propres de n.
Pour le calcul des éléments d'une ligne, connaissant le premier élément de la ligne, on utilise les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$ définis par les relations $T_0(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$T_1(X) = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} T_{n+2}(X) \\ T_{n+1}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n+1}(X) \\ T_n(X) \end{pmatrix}$.
On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 2X - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ égal à $\lambda^2 - 2X\lambda + 1$, les valeurs propres $r_1 = X + i\sqrt{1 - X^2}$ et $r_2 = X - i\sqrt{1 - X^2}$ et les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $U_{n+1}(X) = TU_n(X) = T^n U_0(X) = P^{-1} S^n P U_0(X)$. La matrice de passage P telle que $T = P^{-1}SP = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sa matrice inverse est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Finalement, $T_n(X) = \frac{1}{2}[(X + i\sqrt{1 - X^2})^n + (X - i\sqrt{1 - X^2})^n]$.

Je remercie Jean Lismonde du forum *les-mathematiques.net* qui m'a fourni tous ces éléments, triviaux pour des mathématiciens.

Les éléments des matrices M_n de toutes les colonnes sauf la première sont de cette forme.

Pour obtenir la somme de cosinus qui nous intéresse, il faut prendre la matrice initiale de cosinus M_{10}, la multiplier à gauche par une matrice d'inversion

$$Inv = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

et obtenir ainsi une matrice triangulaire avec un seul cosinus sur la dernière ligne.

$$InvM_{10} = \begin{pmatrix} cos\frac{20\pi1}{10} & cos\frac{20\pi2}{10} & cos\frac{20\pi3}{10} & cos\frac{20\pi4}{10} & cos\frac{20\pi5}{10} & cos\frac{20\pi6}{10} & cos\frac{20\pi7}{10} & cos\frac{20\pi8}{10} & cos\frac{20\pi9}{10} & cos\frac{20\pi10}{10}\\ cos\frac{20\pi1}{9} & cos\frac{20\pi2}{9} & cos\frac{20\pi3}{9} & cos\frac{20\pi4}{9} & cos\frac{20\pi5}{9} & cos\frac{20\pi6}{9} & cos\frac{20\pi7}{9} & cos\frac{20\pi8}{9} & cos\frac{20\pi9}{9} & 0\\ cos\frac{20\pi1}{8} & cos\frac{20\pi2}{8} & cos\frac{20\pi3}{8} & cos\frac{20\pi4}{8} & cos\frac{20\pi5}{8} & cos\frac{20\pi6}{8} & cos\frac{20\pi7}{8} & cos\frac{20\pi8}{8} & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{7} & cos\frac{20\pi2}{7} & cos\frac{20\pi3}{7} & cos\frac{20\pi4}{7} & cos\frac{20\pi5}{7} & cos\frac{20\pi6}{7} & cos\frac{20\pi7}{7} & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{6} & cos\frac{20\pi2}{6} & cos\frac{20\pi3}{6} & cos\frac{20\pi4}{6} & cos\frac{20\pi5}{6} & cos\frac{20\pi6}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{5} & cos\frac{20\pi2}{5} & cos\frac{20\pi3}{5} & cos\frac{20\pi4}{5} & cos\frac{20\pi5}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{4} & cos\frac{20\pi2}{4} & cos\frac{20\pi3}{4} & cos\frac{20\pi4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{3} & cos\frac{20\pi2}{3} & cos\frac{20\pi3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{2} & cos\frac{20\pi2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ cos\frac{20\pi1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, il convient de la multiplier à droite par une matrice triangulaire de 1

$$Tri = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Cela permet d'obtenir sur la diagonale de la matrice résultat $InvM_{10}Tri$ les sommes partielles ligne par ligne. La trace de la matrice résultat (la somme de ses éléments diagonaux) fournit la somme des diviseurs de n.

Petite note concernant une matrice similaire à celle dont on doit chercher les puissances : la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est rigolote : par multiplication, elle ajoute. On a ainsi :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3\\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n\\ n & -n+1 \end{pmatrix}$$