Représentation de la combinatoire associée à la conjecture de Goldbach par des graphes

Denise Vella

Mai 2006

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*[1].

2 Peuvent-ils être tous composés ?

Soit un nombre pair $2x$ qui ne vérifierait pas la conjecture de Goldbach. Il n'existerait alors aucune décomposition additive de ce nombre pair $2x$ comme somme de deux nombres premiers, l'un inférieur à x et l'autre supérieur à x. Appelons p_1, p_2,..., $p_{\Pi(x)}$ les nombres premiers inférieurs à x. Il faudrait alors que tous les nombres de la forme $2x - p_i$ (p_i premier impair inférieur à x) soient composés. Ces nombres composés devraient avoir chacun au moins deux diviseurs premiers impairs inférieurs à x.

Etudions d'abord un cas d'école, où seulement trois nombres premiers seraient inférieurs à x, nous les appellerons $p_1 = a$, $p_2 = b$ et $p_3 = c$. Il s'agit vraiment d'un cas d'école puisque la conjecture a été vérifiée par ordinateur jusqu'à 3.10^{17} en décembre 2005 par l'équipe portugaise d'Oliveira et Silva. Représentons pour ce cas d'école tous les graphes possibles de divisibilité qui représenteraient le fait que tous les $2x-p_i$ ($p_i \in [a, b, c]$) aient au moins deux diviseurs premiers impairs différents chacun, à choisir parmi a, b ou c. Le nombre total de tels graphes est 27 ($= 3^3$).

Expliquons d'abord comment lire un graphe : à gauche, les sommets représentent les nombres premiers p_i inférieurs à x. A droite, les sommets représentent leur "correspondant", égal à $2x - p_i$ pour chacun d'entre eux. On prend l'habitude de disposer les sommets à des distances égales alors que les nombres premiers ne sont pas également espacés en réalité, ce pour des raisons de lisibilité.

[1]Les recherches présentées ici ont été déclenchées par la lecture du roman de Doxiadis "Oncle Pétros et la Conjecture de Goldbach".

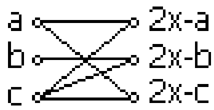


Figure 1 : un exemple

Par exemple, le graphe ci-dessus se lit : $2x - a$ est divisible par a et c, $2x - b$ est divisible par b et c et $2x - c$ est divisible par a et c. Appelons d_1 l'écart entre $p_1 = a$ et $p_2 = b$ et appelons d_2 l'écart entre $p_2 = b$ et $p_3 = c$. On retrouve ces écarts d_1 entre $2x - a$ et $2x - b$ et d_2 entre $2x - b$ et $2x - c$.

On gardera en mémoire le fait que les écarts entre les nombres premiers se retrouvent "en face". Si les écarts sont à gauche de haut en bas d_1 entre p_1 et p_2, d_2 entre p_2 et p_3, on retrouvera "en face" les mêmes écarts, d_1 entre $2x - p_1$ et $2x - p_2$ et d_2 entre $2x - p_2$ et $2x - p_3$.

Etudions toutes les possibilités que chacun des $2x - p_i$ soit divisible par au moins 2 nombres premiers impairs p_i différents sur la figure 2, page suivante.

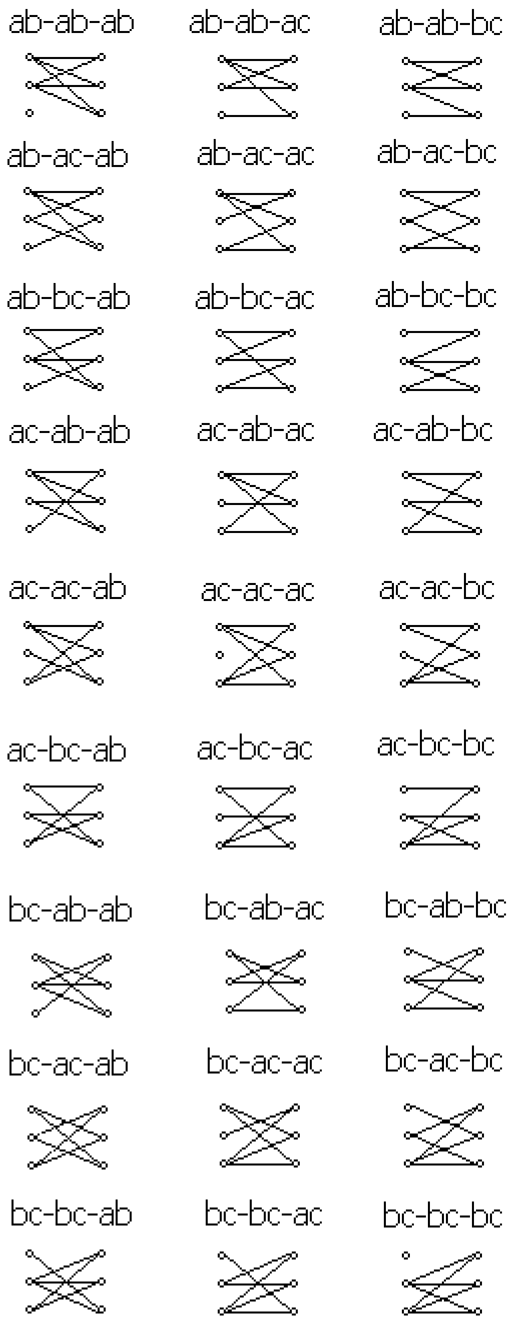


Figure 2 : combinatoire des différentes possibilités de divisibilité par deux nombres premiers impairs différents

;

Un graphe aboutit à une contradiction s'il contient l'une des configurations d'arcs présentées dans la figure 3.

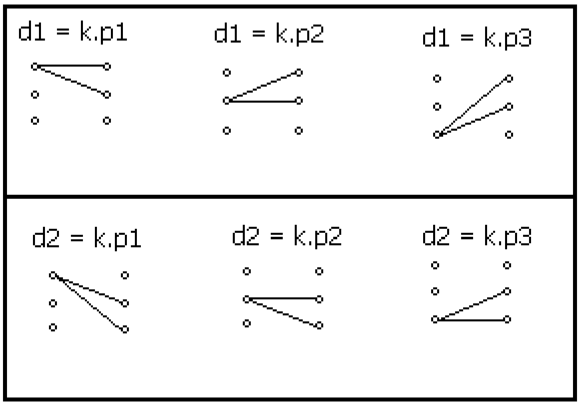


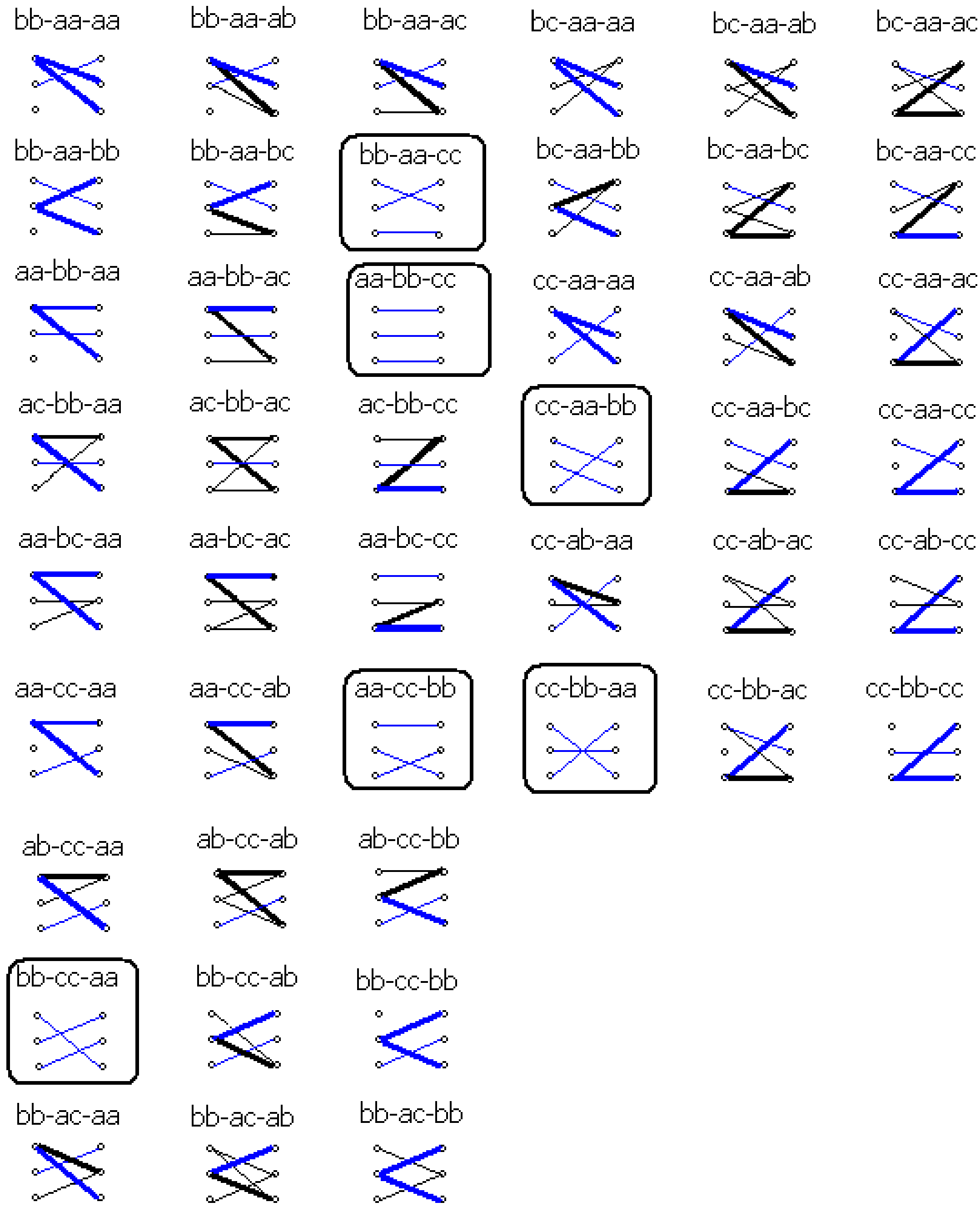
Figure 3 : impossibilités dans le cas de 3 premiers

Expliquons le cas du graphe qu'on appelle $d1 = k.p_1$. Si $2x - a$ et $2x - b$, qui sont séparés par l'écart $d1$ sont tous les deux divisibles par $p_1 = a$, cet écart existant également entre $p_1 = a$ et $p_2 = b$, alors p_2 ne pourrait pas être premier, ce qui est contradiction avec nos hypothèses. On peut faire un raisonnement similaire pour le graphe nommé $d2 = k.p_2$.
Pour les 3 configurations correspondant aux cas appelés $d_i = k.p_j$ avec $j > i$, l'impossibilité vient du fait qu'entre un nombre premier et le nombre premier précédent, l'écart ne peut être un multiple de n'importe quel nombre premier supérieur (par définition, un nombre est premier s'il y a un écart de taille lui-même entre zéro et lui, et il ne pourrait y avoir d'écart multiple de lui entre deux nombres premiers qui lui seraient inférieurs). Quant à la configuration $d_2 = k.p_1$, si $2x - p_2$ et $2x - p_3$, tous deux impairs, sont tous les deux divisibles par p_1, l'écart entre eux est forcément strictement supérieur à $2.p_1$. Or, le postulat de Bertrand, prouvé par Tchebychev, affirme qu'il y a toujours un nombre premier entre un nombre et son double. Cela est en particulier valable si le nombre en question est premier. On a donc $d_2 < p_2 < 2.p_1$. d_2 ne pouvant être simultanément strictement inférieur et strictement supérieur à $2.p_1$, on aboutit là-encore à une contradiction ; ce cas est à rapprocher des cas de contradictions concernant d_2 que l'on a déjà trouvés précédemment ;

On voit que l'on aboutit à une impossibilité dès que $d_i = k.p_j, \forall i, \forall j$.

Problème : on n'a pas envisagé les possibilités pour les $2x - p_i$ d'être divisibles par un carré de premier impair, ce qui les rendrait également composés. La combinatoire augmente alors considérablement : on passe de 3 possibilités d'associations pour chacun des 3 sommets à droite à 6 chacun : *aa*, *ab*, *ac*, *bb*, *bc* et *cc*. Ce qui fait un total de 216 ($= 6^3$) minis-graphes à étudier. Sur ces 216, 189 contiennent des arcs contradictoires. Pour les 27 restant, dessinés sur la figure ci-après, on va pouvoir éliminer certains, grâce à la découverte de nouvelles contradictions mais on restera ennuyée par les autres.

Les arcs correspondant à la divisibilité par un carré de premier impair sont dessinés en bleu.



Les quatre configurations d'arcs page suivante sont elles-aussi impossibles :

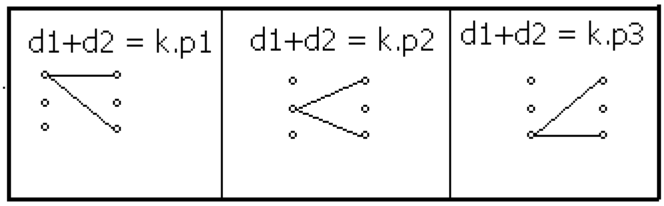


Figure 5 : impossibilités sur d1+d2

- Pour le cas $d_1 + d_2 = k.p_1$, ce qui aurait pour conséquence p_3 non premier ;
- Pour le cas $d1 + d2 = k.p_2$, si $2x - p_1$ et $2x - p_3$, tous deux impairs, sont tous les deux divisibles par p_1, l'écart entre eux est forcément strictement supérieur à $4.p_1$ (il y a $2x - p_2$ entre eux deux). Comme conséquence de Tchebychev, on a cette fois-ci que $d_1 + d_2 < p_1 + p_2 < 3.p_1$. On est face à un nouveau cas de contradiction.
- Pour le cas $d1 + d2 = k.p_3$: il ne peut y avoir entre un nombre premier p et un nombre premier inférieur à p un écart multiple de p ;

On a épaissi les arcs de ces configurations impossibles, dans les 45 cas pour lesquels on n'avait pas encore conclu. Il reste encore les 6 cas pour lesquels chacun des $2x - p_i$ est divisible par un carré de premier impair. On a entouré les graphes correspondant dans la figure de la page 5. Il faut comprendre pourquoi ces cas sont impossibles.

Pour résumer, dès que deux sommets de la partie droite d'un graphe sont reliés à un même sommet de la partie gauche du graphe, on aboutit à une contradiction. Les configurations d'arcs impossibles sont :

- soit de la forme $d_i = k.p_j$;
- soit de la forme $\Sigma d_i = k.p_j$.

3 Extension à quatre ou cinq sommets

Pour 4 sommets, les possibilités pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée d'être associé à deux éléments différents de l'ensemble de départ peuvent se dénoter comme suit : *ab, ac, ad, bc, bd, cd.* Cela engendre $6^4 = 1296$ graphes possibles sans étudier les carrés de premiers impairs, qu'il est hors de question de dessiner ! Si on prend également en compte la possibilité d'être divisible par les carrés de nombres premiers impairs, on arrive à $10^4 = 10000$ graphes possibles. Certaines impossibilités proviennent des portions de graphes représentées sur la *figure 4*:

Pourquoi ces configurations "couvrent-elles" tous les graphes (hors cas de multiples de carrés de premiers d'impairs) que l'on peut envisager, qui feraient que tous les $2x - p_i$ soient simultanément composés ? Observons une colonne de graphes telle que celle contenant les 3 configurations $d_1 = k.p_3, d_2 = k.p_3, d_3 = k.p_3$. Les graphes qui seront couverts par la première configuration $d1 = k.p_3$ devront avoir un c dans le premier couple et un c dans le deuxième couple. Les graphes qui seront couverts par la deuxième configuration $d_2 = k.p_3$ devront avoir un c dans le deuxième couple et un c dans le troisième couple. Les graphes qui seront couverts par la troisième configuration $d_3 = k.p_3$ devront avoir un c dans le troisième couple et un c dans le quatrième couple. Tous les graphes (hors cas des carrés de premiers impairs) sont donc "couverts" par ces 3 configurations à peine et aboutissent ainsi tous à une contradiction.

Pour 5 sommets, les possibilités pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée d'être associé à deux éléments de l'ensemble de départ peuvent se dénoter comme suit : *ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.* Dans l'ensemble de ces possibilités, chaque lettre apparaît $\frac{2}{5}$ fois. Le nombre 10 d'associations possibles est égal à $\frac{5 \times 4}{2}$. Cela engendre $10^5 = 10000$ graphes possibles. Si l'on ajoute les cas de divisibilité par des carrés de nombres premiers impairs, on arrive à 15^5 graphes.

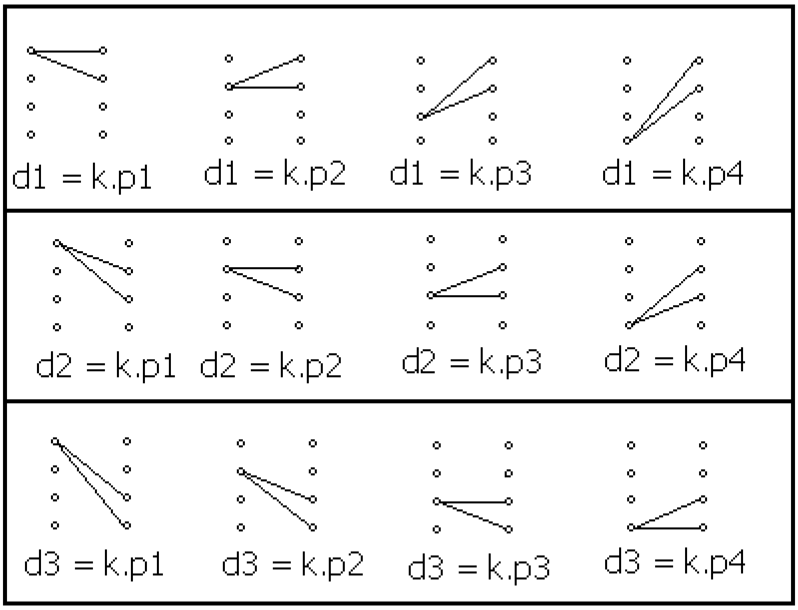


Figure 4 : certaines impossibilités sur les di dans le cas de 4 premiers impairs

4 Généralisation à n sommets

Si l'on s'intéresse aux graphes contenant $2n$ sommets. Chacun des n sommets droits du graphe a $\frac{n(n-1)}{2}$ possibilités différentes d'être divisible par 2 nombres premiers différents parmi les n sommets gauches du graphe. Cela amène à un nombre de $(\frac{n(n-1)}{2})^n$ graphes possibles qui conduisent tous à une contradiction, car une diagonale "couvre" tous les graphes. Quand on ajoute les possibilités de divisibilité par des carrés de premiers impairs, le nombre de graphes s'élève à $(\frac{n(n+1)}{2})^n$.

Les $n-1$ premiers graphes associent chacun le sommet p_i à gauche avec les deux sommets à droite qui sont aux positions i et $i+1$ en partant du haut. Ils correspondent aux contradictions de la forme $d_i = k.p_i$.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ graphes suivants correspondent aux contradictions de la forme $d_i = k.p_j$ avec $j > i$. La *ième* ligne de graphes contient $n-i+1$ graphes. Chaque graphe de cette ligne associe tous les nombres premiers de p_{i+1} à $p_{\Pi(x)}$ à gauche avec les nombres aux positions i et $i+1$ en partant du haut à droite.

D'autres graphes correspondent aux contradictions $d_i = k.p_j$ avec $j < i$. D'autres enfin correspondent aux contradictions $\Sigma d_i = k.p_j$ avec $j < i$.

5 Conclusion

Les $2x - p_i$ ne peuvent pas avoir chacun deux diviseurs premiers impairs différents simultanément : on aboutit à des contradictions avec les hypothèses. Si l'on arrive à résoudre les cas faisant intervenir seulement des carrés de premiers impairs, on pourra peut-être conclure que l'un au moins des $2x - p_i$ est premier et fournit avec p_i une décomposition Goldbach de $2x$. Pourra-t-on alors enfin utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est le milieu de deux nombres premiers"* ?

References

[1] P. Damphousse. *L'arithmétique ou l'art de compter.* Éd. Le Pommmier, 2002.

[2] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

[3] L. Euler. *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Éd. Commentationes arithmeticae 2, p.639, 1849.

[4] P. Hoffman. *Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres.* Éd. Belin, 2000.

[5] C.A. Laisant. *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach.* Éd. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

[6] G. Tenenbaum, M. Mendès France. *Les nombres premiers.* Éd. Que sais-je ?, n°571, 1997.