Transcription d'une video d'Alain Connes au Collège de France, Colloque Langage et Pensée (octobre 2018) (Denise Vella-Chemla, 19.1.2019)

Voilà donc... merci. Alors, je vais essayer de détendre l'atmosphère, parce que... donc je vais rebondir sur l'introduction de Jean-Noël Robert, pour vous signaler une variante de «je pense donc je suis»qui je pense, si vous voulez, est en fait le meilleur graffiti que j'aie jamais vu, c'était dans les toilettes de Jussieu (rires) et y avait une pancarte qui mettait... si vous voulez, qui indiquait «Veuillez laisser ces toilettes aussi propres lorsque vous sortez que quand vous rentrez»et y avait un p'tit malin qui avait écrit en-dessous : «j'y pense donc j'essuie»(éclats de rires)... D'accord !... Donc je vais vous parler du langage mathématique et donc si vous voulez, mon exposé sera en fait à la fois une initiation au langage mathématique et en même temps, une réflexion sur le langage mathématique. Donc ce langage, le langage mathématique est un langage codé, c'est un langage codé au départ qui fait qu'il y a certaines habitudes. Par exemple, en mathématiques, si vous voulez, il est traditionnel d'appeler l'inconnue x. C'est ainsi que dans une école, un professeur avait posé l'exercice suivant : on donne un triangle, le triangle est un triangle équilatère et euh, bon ben, qu'est-c'qu'on sait ? On a le théorème de Pythagore : le théorème de Pythagore dit que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des 2 côtés, donc il faut comprendre carré comme vraiment un carré, donc, ici, qu'est-ce qu'on écrit ? On écrit qu'on a 3 au carré, ça vaut 9, 4 au carré ça vaut 16, 9 plus 16, ça fait 25, donc on devine... la réponse. D'où si vous voulez l'embarras du professeur quand il a vu la réponse qui lui était donnée par un élève (éclats de rires). D'accord ? Donc évidemment, c'était... c'était une réponse imparable, hein, c'est imparable, le professeur peut pas dire «c'est faux»donc... alors, pour revenir aux choses sérieuses hein, parce qu'on va revenir aux choses sérieuses maintenant donc mon exposé sera divisé en 4 parties.

Dans la première partie, je vous donnerai des éléments de langage. Donc je vous parlerai de géométrie, de théorèmes, je vous expliquerai ce que c'est qu'un lemme, une démonstration, un contre-exemple, une conjecture, je vous parlerai d'algèbre et la grande difficulté de cette partie de l'exposé, ce sera de ne pas me laisser submerger par la démonstration, donc, parce que ce qui nous intéresse, c'est le langage, c'est pas, si vous voulez, le contenu sémantique, c'est le langage qui va nous intéresser donc... Et pourtant, je ne peux pas vous expliquer tout ça en abstrait, je suis obligé de vous l'expliquer sur un exemple parce que, je vais dire, on verra que c'est extrêmement important en fait d'avoir un support qui est un exemple précis.

Dans la deuxième partie, je vous parlerai d'un livre, qui est un livre de Hans Freudenthal qui est un mathématicien, voilà le livre, et c'est un mathématicien qui a compris qu'en fait, il y avait une particularité, une spécificité du langage mathématique, sur laquelle je ne reviendrai pas, qui est que c'est sans doute l'un des seuls langages qui ne soit pas entièrement auto-référentiel. Vous voyez, quand vous prenez un dictionnaire, le dictionnaire définit des mots par rapport à d'autres mots. Mais en mathématiques, justement, il est possible, et c'est ce qu'a fait Hans Freudenthal dans le Lincos, il est possible de construire la mathématique, de manière progressive, en partant si vous voulez de... une impulsion, deux impulsions, tout ça, ça va signifier les entiers, etc., etc. Et il a compris que, en fait, s'il y avait une possibilité de communiquer avec une intelligence extraterrestre, euh, eh bien, il faudrait construire entièrement la langue, c'est parce que là, il s'agit vraiment d'une langue, à partir des mathématiques. Et c'est ce qu'il a fait. Alors il y a des réflexions extrêmement intéressantes, mais ce que nous verrons, ce que nous verrons, qui est aussi tout à fait extraordinaire, c'est qu'en fait, l'univers communique avec nous, il communique en langage mathématique et je vous expliquerai sous quelle forme il communique avec nous.

Alors la troisième partie, ce sera, elle viendra du fait que le langage mathématique bien sûr évolue et, très graduellement le paradigme qui était au centre des mathématiques pendant... euh, jusqu'aux cinquante dernières années, qui était le paradigme des ensembles, a été remplacé, très progressivement pendant les cinquante dernières années, par un nouveau paradigme qui est le paradigme des catégories. Et ce remplacement en fait, au niveau du langage est extrêmement important et en fait, c'est grâce à ce remplacement qu'un concept extraordinaire est né dans les mains de Alexandre Grothendieck. Ce concept, c'est le concept de topos, et c'est un concept qui illustre à merveille le fait que justement les mathématiques ne sont pas du tout, euh, si vous voulez, euh, confinées à un langage, confinées à des calculs ou des choses comme ça. En fait, les mathématiques sont une usine qui fabrique des concepts nouveaux et pour vous montrer la richesse, la variété si vous voulez de ces concepts, le concept de topos est tellement... puissant qu'en fait, il donne des nuances sur la notion de vérité et on verra à la fin de mon exposé que le concept de topos permet par exemple de définir de manière parfaitement rigoureuse ce que c'est que d'être à trois pas de la vérité, à quatre pas de la vérité, etc. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire parce que ça montre que le langage mathématique si vous voulez, et pas seulement les mathématiques mais le langage mathématique touche... en fait... a une portée philosophique qui est bien au-delà de ce qui est normalement admis dans le grand public. Le grand public confine les mathématiques à des calculs ou à des figures géométriques mais c'est très très loin d'être là. En fait, si vous voulez, la plupart des concepts vraiment importants ont une origine mathématique et ont une formulation mathématique précise.

Voilà, donc, voilà le plan, voilà le plan, donc ce que j'ai choisi de faire, comme je l'ai dit, c'est de partir d'un exemple concret. Alors, cet exemple concret, c'est un théorème, c'est un théorème qui a un peu été trouvé par hasard, par Franck Morley. Pourquoi il a été trouvé par hasard ? Il a été trouvé par hasard, il a été trouvé en 1899, Franck Morley ne se préoccupait pas de la question qu'on va voir, de l'énoncé qui est là. Euh, en fait, il cherchait un problème géométrique qui était beaucoup plus compliqué sur des cardioïdes, etc., mais en gros, il est tombé dans son cheminement, il est tombé sur un fait, qu'on va considérer comme un fait, et qui est un fait tout à fait frappant, tout à fait extraordinaire, qui dit la chose suivante : il dit que quand vous prenez un triangle, un triangle quelconque, le triangle est absolument quelconque ici, et ce que vous faites, c'est, vous divisez chacun des angles du triangle en trois parties égales, donc, c'est ce qu'on appelle les trissectrices des angles, et vous intersectez ces trissectrices 2 à 2. Ce que dit le fait, ce que dit le théorème de Morley si vous voulez, c'est que vous avez toujours un triangle équilatéral. Alors ça, c'est quelque chose d'extrêmement simple, d'extrêmement frappant, et la réaction d'un géomètre, c'est le doute. C'est-à-dire si vous êtes un géomètre et on vous énonce un énoncé pareil, eh bien, la première chose que vous avez à faire, c'est à douter. Donc vous doutez, vous dites : «Boah, je dis «ça peut pas être vrai !que je vais vous fabriquer un triangle qui ne va pas marcher. D'accord ?». Bon alors là, qu'est-c'qui va se mettre en route dans le cerveau, peut-être que Stanislas nous le dira de manière beaucoup plus précise, mais ce sont les aires visuelles, c'est-à-dire c'est le géomètre qui va se mettre en route, et qui va essayer, il va essayer de construire d'autres triangles et il va regarder ce qui se passe. Donc en fait, on va regarder simplement on va regarder, on va construire d'autres triangles, vous voyez. On construit un autre triangle, eh bien, ça a quand même l'air d'être vrai, quoi (petits rires).

D'accord ? Donc on continue, on continue comme ça, alors vous voyez ce que je suis en train de faire là, je suis en train de faire sur le triangle une opération extrêmement bizarre, je suis en train de descendre le sommet qui est là sans bouger le sommet qui est là, et normalement quand on fait ça, c'est une transformation affine donc ça ne préserve pas du tout les longueurs donc c'est très étonnant que malgré ça, le triangle reste équilatéral au milieu. Donc on continue comme ça, on continue, on cherche toutes sortes d'exemples, on cherche à aplatir le triangle, à le..., on fait la même opération, eh bien, ça a l'air de toujours marcher. Donc au bout d'un moment, au bout d'un moment, quand on a fait ça suffisamment de fois, ben, le doute commence à se dissiper, et là, il faut qu'on se mette en route parce qu'il ne suffit pas d'avoir pris des exemples, bien sûr, des exemples n'ont jamais démontré un théorème, donc le doute a commencé à se dissiper et on va partir, on va se mettre en route, on va se mettre en route pour la démonstration. Et alors, dans une démonstration en général, la démonstration est précédée par des étapes, ces étapes s'appellent des lemmes, d'accord ? Alors c'est pas un hasard si le nom de lemme a été utilisé lorsqu'en fait les astronautes sont allés sur la lune, ils ont employé le terme de lemme, hein, et c'est exactement dans le même sens, c'est-à-dire que le lemme, c'est pas euh, si vous voulez le résultat, mais c'est ce qui vous permet d'avancer et d'aller vers le résultat. Donc dans le langage mathématique, le lemme a un sens extrêmement précis : en général, l'énoncé du lemme en soi n'est pas suffisamment, comment dire, euh, convaincant, pour que ça fasse un théorème, c'est juste un petit résultat qui permet d'avancer, c'est pas vraiment un théorème, d'accord ? Alors là, on va voir un premier lemme et on va voir comment, justement, ce lemme va nous permettre de mieux illustrer, de mieux, si vous voulez, initier au langage mathématique. Donc que dit le lemme ?

Le lemme dit la chose suivante : il ne faut pas que je me perde dans la démonstration donc je vais aller très vite, il dit que si vous regardez les rotations, par rapport aux sommets, donc le centre de la rotation, c'est le sommet, mais les angles sont doubles, et vous faites ce produit, vous faites le produit $R_A.R_B.R_C$. Alors vous allez voir, là, il y a une particularité du langage mathématique, c'est que quand on fait le produit, eh bien, on commence par appliquer R_C. Alors ça vous paraîtra bizarre mais ça vient du fait de la notation dans le langage mathématique, du fait que quand on prend une fonction de x, par exemple $\sin x$, le x apparaît après, donc c'est à cause de ça que, quand on va appliquer $R_A.R_B.R_C$, on va appliquer d'abord R_C puis R_B puis R_A. Bon. Alors, donc, que dit le lemme, le petit lemme ? Il dit que si je fais le produit de ces 3 rotations, j'obtiens ce qu'on appelle la transformation identique. Alors maintenant, ce qui est absolument étonnant, c'est que maintenant on va voir que, on va agir. Au départ, si vous voulez, il y avait un théorème, il y avait un fait, on était exposé à ce fait, mais maintenant on va commencer à agir, pour faire la preuve de ce lemme. Comment est-ce qu'on agit ? Eh bien, c'est ce qu'on appelle un groupe qui agit sur un ensemble. Mais qu'est-ce que ça veut dire ici ? Qu'est-ce que ça veut dire ici ? Ca veut dire quelque chose d'incroyablement simple, ça veut dire que contrairement au langage courant, lorsqu'on va faire la démonstration de ce fait que le produit des 3 rotations R_A, R_B, R_C vaut l'identité, eh bien, on va avoir seulement une toute petite opération à faire, qui est l'opération qui consiste à jouer avec les parenthèses. Alors vous voyez le groupe qui va être en action ici, il va contenir les rotations, mais ça va être en fait le groupe des transformations du plan qui préserve les longueurs. Et alors, la chose essentielle, c'est qu'en fait si vous prenez la rotation autour du point B qui est ici, eh bien en fait, on peut la décomposer en deux choses : la symétrie autour de 1, puis la symétrie autour de 3. Vous voyez, si vous faites la symétrie autour de 1, par exemple, si je prends le point qui est ici, et la symétrie autour de 3, ça va bien tourner de l'angle double, qui est là. Et ça, ça marche en général. Donc qu'est-ce qu'il en résulte ?

Pourquoi la démonstration est aussi simple ? Eh bien, parce que le R_B qui est là, je peux, comme je vous l'ai montré, je peux l'écrire comme s_3s_1. Les autres, c'est s_1s_2 et s_2s_3. Et maintenant je peux jouer avec les parenthèses. C'est pas du tout pareil que dans le langage courant, bien sûr. Donc le rôle des parenthèses n'est pas du tout le même. Dans un groupe, on peut se débrouiller avec les parenthèses comme on veut, on peut faire un jeu de parenthèses, et avec ce jeu de parenthèses, on obtient immédiatement le résultat puisque vous voyez, maintenant, je vais remplacer ce produit-là par un produit où s_3, s_3 seront contigues, s_1, s_1 seront contigues mais comme s_3 était une symétrie par rapport à une droite, s_3s_3, ça vaut 1, s_1s_1 ça vaut 1, il ne reste que s_2s_2 et s_2s_2, ça vaut 1. Donc on a fini, d'accord ? Donc voilà la démonstration.

Donc vous voyez le rôle du langage, le rôle de l'écriture, là, dans la démonstration. Alors un autre petit lemme, d'accord, mais qui va vous montrer comment le même type d'action est absolument crucial dans ce type si vous voulez de démonstration, c'est un lemme qui va aussi nous faire beaucoup avancer, et qui est le suivant, et qui dit comment on va trouver les 3 sommets du triangle de Morley, par exemple, le point P qui est ici qui est à l'intersection de ces 2 trissectrices. Eh bien, que dit le lemme ? On aura ces 2 petits lemmes. Que dit le lemme ? Il dit simplement que le sommet P du triangle de Morley, c'est simplement le point fixe de la même chose que tout à l'heure, mais j'ai mis des puissances 1/3. Le fait d'avoir mis des puissances 1/3, ça veut dire que l'angle par lequel je bouge va être le tiers, le tiers du double de l'angle en C. Eh bien, c'est exactement l'angle qui est ici. Que fait le point P ? Voilà l'action maintenant, voilà, maintenant on va être en action. Eh bien, si on fait ${R_C}^{1/3}$, on transforme P en P'. Et puis si on fait ${R_B}^{1/3}$, après, ben, on ramène P' en P. Donc on a bien le point fixe. Alors maintenant, on commence à contrôler les choses. On commence par contrôler les choses parce qu'on a 3 symboles, R_A, R_B, R_C, et on contrôle les sommets du triangle de Morley grâce à ces 3 choses, d'accord ?. Mais on est bien loin d'avoir fini et quand on est dans cette situation-là, maintenant, qu'est-ce qu'on voit ? Eh bien, avec un peu de réflexion, on s'aperçoit que les deux lemmes que je vous ai expliqués, les deux lemmes que je vous ai expliqués, en fait, ce sont des lemmes vraiment géométriques, c'est-à-dire ce sont des lemmes qui vont être encore vrais en géométrie non-euclidienne.

Qu'est-ce que c'est que la géométrie non-euclidienne ? Ca peut vous paraître très compliqué, mais en fait, en général, si un résultat est vrai en géométrie non-euclidienne, il va être vrai pour la géométrie sphérique. Qu'est-ce que c'est que la géométrie sphérique, eh bien, c'est la géométrie de la Terre, si vous voulez, mais rendue parfaite, une sphère parfaite, et dans laquelle les droites sont les grands cercles. Alors, la conjecture qu'on peut faire à ce moment-là, ben, on peut se dire «ben, peut-être que le théorème de Morley est vrai pour la géométrie sphérique.»Alors, c'est pareil, on va faire appel à nos aires visuelles cette fois, et ça va être plus difficile, parce que maintenant, on ne peut plus prendre une droite, je veux dire on ne peut plus dessiner sur une feuille de papier, il faut vous montrer une figure qui est plus complexe. Donc voilà ce qu'on fait, on essaye, on fait comme tout-à-l'heure, on regarde, Ah, ça a quand-même l'air d'être vrai, hein ?!Vous voyez ? J'ai pris un triangle extrêmement particulier, un type de triangle extrêmement particulier, j'ai pris un triangle qui avait un sommet au pôle Nord et dont la base était sur l'équateur. C'est un triangle très particulier parce qu'il a 2 angles droits, cet angle-là est droit, cet angle-là est droit et la somme des angles évidemment ne vaut pas π. Donc vous voyez, on essaye, on essaye, on regarde, on regarde, ben, ça a l'air quand-même tout à fait vrai, hein, je veux dire, c'est vraiment extrêmement étonnant, vraiment extrêmement étonnant, donc on fait appel à nos aires visuelles, etc., on essaye, et puis là, alors là, on peut poser la question à l'ordinateur.

Donc là, on va... on se pose vraiment la question «est-ce que c'est vrai ?Est-ce que c'est vrai ?», on parle à l'ordinateur, on parle à l'ordinateur, Gérard en parlera de manière beaucoup plus précise que moi, on communique avec l'ordinateur, ce n'est pas très difficile pour la géométrie sphérique, c'est très

très simple, à vrai dire, la géométrie sphérique est même plus simple que la géométrie ordinaire, donc on parle à l'ordinateur, on lui pose la question, et au bout d'un moment, l'ordinateur nous dit «non, c'est pas vrai !». Incroyable ! L'ordinateur calcule la différence entre la longueur du côté qui est là, puisque le triangle est isocèle par définition, donc ces deux longueurs sont égales, mais cette longueur n'est pas a priori la même. Si elle était la même, ce serait un triangle équilatère, équilatère, ça veut dire qu'il y a les 3 côtés qui ont la même longueur, donc en fait, on regarde et incroyable ! Voilà la courbe de toutes, toutes les différences. Au départ, cette différence, c'est presque 0, mais vous voyez, c'est 0 à 4 décimales près. Donc ça veut dire que si on se fiait à notre vue, on aurait cru que le théorème était vrai, d'accord ?, en fait, il n'est pas vrai. Il n'est pas vrai, c'est ce qu'on appelle un contre-exemple, on a fait une conjecture, on a un contre-exemple à cette conjecture, et maintenant qu'est-ce qui se produit ? Du fait qu'on a un contre-exemple à la conjecture, ça nous oblige à changer complètement de stratégie pour la démonstration. Pourquoi ?

Parce que si la conjecture avait été vraie, si le théorème avait été vrai en géométrie non-euclidienne, la preuve aurait été entièrement géométrique. Le fait que le théorème soit faux en géométrie non-euclidienne nous dit qu'il va maintenant y avoir un changement de décor total et ce changement de décor total, ça va être le passage à l'algèbre. L'algèbre est née d'un... comment dire ? est née d'une hérésie. L'algèbre est née d'une hérésie il y a très très longtemps, longtemps avant Jésus-Christ, les hérétiques ont fait la chose suivante : ils ont rajouté des longueurs avec des surfaces... et puis des surfaces avec des volumes. C'est complètement fou ! Vous voyez quand au départ, je vous parlais de ce petit triangle de l'élève, quand on écrit la règle de Pythagore, je vous disais «le carré d'un côté est égal à la somme des carrés...», ça, les dimensions sont préservées, parce qu'on rajoute entre elles des surfaces, on rajoute entre elles des carrées, mais il y a un mathématicien très ancien, très ancien, qui a eu l'idée de poser un problème, je crois que c'était chez les Babyloniens, dans lequel il posait une relation entre la surface et la longueur, c'est incroyable, donc, à ce moment-là, l'algèbre est née. Donc elle est née de cette hérésie, qui était de rajouter entre elles des quantités qui n'ont absolument pas la même dimension, que jamais un physicien ne ferait bien-sûr, hein, qui est d'ajouter des longueurs, des surfaces et desvolumes. Et alors donc, maintenant donc, voilà la démonstration. Que dit la démonstration ? Elle dit que maintenant le théorème de Morley n'a rien à voir avec un énoncé géométrique pour la géométrie non-euclidienne, il a à voir avec un énoncé d'algèbre, un énoncé d'algèbre qui est tellement explicite que l'on peut le donner à faire à un ordinateur. Quand, si vous voulez, une différence fondamentale, entre le théorème de Morley au départ et l'énoncé qui est ici, peut importe l'énoncé, j'ai dit que je ne voulais pas me perdre dans les détails techniques, etc., quelle est la différence fondamentale ? La différence fondamentale, c'est que quand on est devant un problème géométrique, on peut sécher, on peut sécher indéfiniment. Quand on est devant un problème d'algèbre comme celui-là, non seulement on n'a pas le droit de sécher parce qu'on doit faire le calcul, mais on peut déléguer le problème à l'ordinateur, c'est ce qu'on appelle le calcul formel, et ce calcul formel est tellement puissant si vous voulez, qu'en fait, il peut faire des calculs infiniment plus compliqués que celui-là, je me souviens d'avoir une fois, il y a très longtemps, au début des années 2000, délégué un calcul à l'ordinateur qui a pris toute une nuit, je voulais démontrer qu'un certain produit était associatif, et bon ben, le lendemain matin, l'ordinateur avait fait le calcul, donc c'est absolument phénoménal la puissance qu'il y a pour faire des calculs extrêmement compliqués. Donc, lorsqu'on a fait ça, si vous voulez, on peut se dire : «Bon, d'accord, on a donné une démonstration du théorème de Morley, donc si vous voulez, on est arrivé. Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ? Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ?. C'était le troisième lemme».

Mais... maintenant, quelle est la différence ? Il y a une différence qui est absolument cruciale, la différence qui est cruciale, c'est le pouvoir génératif du langage mathématique. Parce que maintenant, une fois qu'on a formulé le résultat sous la forme du lemme, le dernier, le dernier lemme, qui est purement algébrique, eh bien, le théorème de Morley a un sens sur n'importe quel corps... Bien sûr, je ne vous ai pas dit qu'il y avait un secret derrière le lemme que j'ai donné ici, qui était que ce lemme, on l'applique à un corps, ce qu'on appelle un corps qui est le corps des nombres complexes. Le corps des nombres complexes, c'est un miracle, c'est le fait qu'on peut, vous avez l'habitude des nombres rationnels, par exemple, que vous pouvez ajouter, multiplier, etc.. On a l'habitude des nombres réels, eh bien, il y a une extension des nombres réels, qui est merveilleuse, et qui fait qu'il suffit en fait de rajouter une racine d'une équation qui est l'équation $x^2 + 1 = 0$ pour qu'on puisse résoudre toutes les autres équations. C'est ce qu'on appelle le corps des nombres complexes, et ce corps des nombres complexes, bon, on l'apprenait en... je crois qu'on l'apprenait en seconde, moi, je l'avais appris en seconde, en physique, pour faire de l'électromagnétisme, et en fait, ce qui est extraordinaire dans le corps des complexes, c'est qu'un triangle équilatère est caractérisé par la propriété que 3 points forment les sommets d'un triangle équilatère si et seulement si $a+jb+j^2c = 0$

où j est une racine cubique de l'unité. Alors maintenant, ce qui est merveilleux, c'est qu'on a un théorème de Morley pour n'importe quel corps qui contient une racine cubique de l'unité. Alors, ces corps abondent, par exemple, vous pouvez prendre les entiers modulo 7, les entiers modulo 13 ou les entiers modulo 31, ce sont des corps, c'est ce qu'on appelle des corps de Galois, et ils ont tous une racine cubique de l'unité, donc il y a tous, pour eux, un théorème de Morley que jamais, on aurait pu imaginer, si on n'avait pas eu ce cheminement, à travers la géométrie et l'algèbre, qui nous a conduit ici. D'accord ?. Donc, voilà où on en est, voilà où on en est. Euh alors maintenant, oui, bien sûr, il faut que je vous dise, oui, quand-même, qu'il y a, dans le langage mathématique, un usage constant des mots du langage ordinaire. Euh, on utilise, dans le langage mathématique, des mots du langage ordinaire, et il y a une phrase assez provocante, qui est faite à travers les mots du langage ordinaire, et qui s'appelle «désintégration des mesures atomiques sur les espaces nucléaires». Alors, si vous voulez, cette phrase est d'autant plus ironique que l'inventeur de la dénomination d'espace nucléaire, d'abord, elle est ironique parce qu'un mathématicien qui connaît le sens de ces mots vous dira «c'est une trivialité.». Alors trivialité, c'est usité, c'est un espèce de jargon mathématique, qui est pour quelque chose qui, boh, qui est vrai, mais qui est sans intérêt, d'accord ? Donc... Mais ce qui est vraiment ironique dans cette phrase que je vous ai donnée, c'est que l'inventeur, l'inventeur de la notion d'espace nucléaire est un mathématicien formidable, très connu, Alexandre Grothendieck, mais qui a passé une majeure partie de sa vie à être un militant anti-nucléaire. (rires) Donc, alors, il est... il y a toujours, il avait un don absolument extraordinaire pour trouver la bonne terminologie. Alors, donc, j'en viens maintenant au Lycos, donc, euh, je ne vais pas paraphraser ce que dit Hans Freudenthal, son livre est extrêmement précis, etc., il a écrit une introduction que je vous recommande de lire, dans laquelle il fait des réflexions sur le langage mathématique et sur le langage en général et il explique un point, qui est un point délicat, qui est un point qui n'est pas du tout évident, qui est que en mathématique, on utilise des variables, bon je vous ai parlé de x tout à l'heure, et c'est un peu la même chose lorsqu'on parle du langage courant. Mais, en mathématique, les variables ont un sens précis, et en plus, par exemple, il y a une notion d'objet générique, c'est-à-dire en mathématiques, on peut parler par exemple d'un triangle générique, etc., il y a ce qu'on appelle un point générique, lorsqu'on parle d'un ensemble mathématique. Et alors, ce qui est vraiment étonnant, c'est que si.... Donc... Hans Freudenthal discute en grand détail de ce qui se passe dans le langage ordinaire, et le fait que dans le langage ordinaire, bien sûr, il y a des variables : par exemple, on dit une porte, on dit une chèvre. Vous allez voir que je ne prends pas l'exemple de la chèvre au hasard.

Bon, mais alors bien sûr, si on se posait la question, ce serait extrêmement difficile de décrire, euh, une porte générique, ou de décrire une chèvre générique. Seul un artiste génial y est arrivé pour la chèvre, et je suppose que vous connaissez l'œuvre en question, hein, c'est ce qu'on appelle, c'est la chèvre de Picasso, et elle a cette propriété, cette chèvre, cette incarnation de la chèvre a cette propriété extraordinaire, comment dire, qu'elle abstrait les propriétés de la chèvre, de manière concrète, par une œuvre artisitique. Alors, bien sûr, en mathématiques, tout ça, ça a un sens précis, ça a un sens beaucoup plus précis, et euh, bon... pour en revenir à la communication avec une intelligence extraterrestre, on a essayé, on a essayé, on a essayé de communiquer avec une possible intelligence extraterrestre, en envoyant la sonde, par exemple, en envoyant la sonde Pioneer dans l'espace, et sur cette sonde, on a donné un certain nombre de renseignements, ben, par exemple, on a donné le Soleil, enfin, on a donné la position des planètes, etc., etc., mais, bon, est-ce que... est-ce que dans ce qu'on a donné dans cette sonde, on a donné aux aliens la possibilité de nous répondre ? Je prétends qu'il y a une autre manière de faire, ç'aurait été de leur envoyer un petit triangle de Morley (éclats de rires), d'accord ?... Et imaginez qu'ils nous répondent comme ça... Ben voilà, là, on saurait que... non seulement, ils nous ont compris, mais que ce sont des gens intelligents, etc., etc. Alors en fait, bon, en fait, ce moyen de communication dont je vous parle n'est pas très pratique parce que ça veut dire qu'il aurait fallu qu'ils reçoivent la sonde en tant qu'objet physique, et qu'ils nous la renvoient en tant qu'objet physique. C'est pas comme ça qu'on communique dans l'Univers. On sait bien que l'Univers est écrit en langage mathématique, mais de quelle manière l'Univers communique-t-il avec nous, en langage mathématique ? Alors là, vous allez être vraiment surpris, parce que la manière dont il communique avec nous, on va voir, c'est... vous savez, on a beaucoup cherché... on a beaucoup cherché à... comment dire... à étiqueter, étiqueter les objets, etc. Et en cherchant à étiqueter les objets, on est tombé graduellement sur la bonne idée. Et la bonne idée de l'étiquetage des objets, c'est ce qu'on appelle les codes-barres. Ce que je vais vous expliquer maintenant, c'est que l'Univers communique avec nous par des codes-barres. Et qu'en plus, ces codes-barres, ce sont des objets mathématiques. Et je vais vous raconter ça, je ne sais pas combien de temps il me reste, bon, mais je vais... Et il faut que je vous parle des topos aussi. Donc... je vais vous raconter ça. Pourquoi ? Parce que ce qui est incroyable, c'est comment ça a été découvert. D'abord, ça a été découvert en physique. En physique, il y a un opticien allemand, qui s'appelle Fraunhofer et qui a eu l'idée absolument géniale, de regarder la lumière du soleil, l'arc-en-ciel qui nous vient du soleil quand on fait passer la lumière du soleil à travers un prisme, de la regarder avec un microscope. Et il s'est aperçu qu'il y avait des raies noires. Il y avait un certain nombre de raies noires. Alors au début, il a dû penser que son objectif était sale, etc. Puis, bon... Et finalement, au cours de son existence, il a trouvé 500 raies noires. Ensuite, il y a eu des physiciens, je crois que c'étaient Bunsen et... qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium à obtenir des raies qui cette fois étaient des raies brillantes, et pas des raies noires, sur un fond noir, et qui correspondaient aux raies du spectre de Fraunhofer, qui venaient du soleil. Et ils se sont aperçus, si vous voulez, que chaque élément chimique, avait un code-barre. Donc chaque élément chimique, par exemple l'hydrogène, etc., avait un code-barre. Sauf que... il y avait un code-barre qu'ils n'arrivaient pas à trouver sur la Terre. Il y avait un code-barre qui manquait sur la Terre. Et alors, en bons physiciens, ils lui ont donné un nom, ils l'ont appelé l'hélium.

Ils ont dit «il y a un corps chimique, qui n'est pas présent sur la Terre, qui est dans l'héliosphèreet qui s'appelle l'hélium.». Miracle ! Il y a eu une éruption du Vésuve. On a fait la spectrographie des laves du Vésuve et on a trouvé l'hélium dedans. Donc ça, c'est extraordinaire ! Qu'est-ce que ça veut dire ? C'était la première étape. C'était la première étape des codes-barres dans la physique. La deuxième étape qui est absolument sidérante, c'est au niveau de la mécanique quantique, c'est Schrödinger, quand il a eu l'idée de son équation, il a eu l'idée si vous voulez, qu'il avait un opérateur et cet opérateur, en fait, c'est ce qu'on appelle des spectres bien sûr. Donc il est allé voir des mathématiciens et il leur a demandé «Qu'est-ce que c'est un spectre en mathématiques ?». Alors ses amis lui ont dit : «Eh bien, va voir Hermann Weyl, et il te dira tout de suite ce que c'est.». Et Schrödinger a dit : «Surtout pas, il calculerait le spectre avant moi.». Donc, ce qu'a fait Schrödinger qui était extraordinaire, c'est qu'il a donné le coup d'envoi au fait que tous ces spectres, tous ces codes-barres qui nous viennent de l'Univers, en fait, ils ont une raison d'être mathématique, en fait, ce sont des êtres mathématiques. Ce sont les spectres d'opérateurs dans un espace de Hilbert.

Et lorsqu'on les voit, ils semblent très compliqués, mais l'opérateur lui, est beaucoup plus simple. Et c'est l'opérateur qui nous donne la clef, par exemple, la clef qui permet de comprendre le tableau de Mendeleiev. Donc, en fait... l'Univers nous parle, il nous parle, mais il nous parle sous forme spectrale, il nous parle en nous envoyant des codes-barres, ces codes-barres sont décalés vers le rouge, c'est ça qui nous a permis de comprendre l'expansion de l'Univers, etc. Mais vous voyez le rôle phénoménal, là, de l'écriture. Là, je ne parle pas du langage mathématique, je parle de l'écriture. Donc, l'Univers nous envoie des renseignements sous forme d'écriture, et d'écriture spectrale. Alors maintenant, j'en viens à l'évolution du langage mathématique, d'accord ?. Donc le langage mathématique a évolué bien sûr. Il a évolué au cours des 50 dernières années, et il a évolué de manière qui sera assez difficile à faire passer dans l'enseignement. La raison pour laquelle je pense que ce sera assez difficile à passer dans l'enseignement, c'était ce qui s'était passé lorsque Lichnerowicz avait promulgué l'enseignement de la théorie des ensembles, dans les classes secondaires, même au collège. Et je me souviens d'un exercice que j'avais vu, je veux dire j'avais été témoin d'un exercice. L'exercice est le suivant : on prend 3 ensembles A, B, C. On trace des diagrammes de Venn, d'accord, (rires), et le sujet de l'exercice était : on suppose $A \cap B = C$ et le sujet de l'exercice, c'était «Hachurez l'ensemble vide.». Donc, il y avait un seul élève qui avait trouvé, et il a mis «J'ai pas pu, il est vide.». (rires). D'accord, donc, il est clair qu'on va avoir des problèmes pour les catégories, bon, les catégories, c'est déjà le niveau au-dessus de la théorie des ensembles. Mais comme je le disais dans mon introduction, les catégories ont permis, elles ont permis justement, grâce à leur souplesse par rapport à la théorie des ensembles d'inventer un langage, si vous voulez, de développer un langage, qui a été, euh, comment dire, qui a été formulé, euh, initié etc. par Alexandre Grothendieck et qui est la notion de topos.

Alors la notion de topos, c'est bien que je vous en donne simplement une idée. Et cette idée, c'est que, au lieu de vous concentrer sur un espace, comme l'espace de tout à l'heure, la sphère, ou un truc comme ça, au lieu que ce soit l'espace que je vous montre, qui est au-devant de la scène, l'espace va jouer un rôle complètement différent. L'espace va disparaître, va être derrière la scène, mais il va jouer le rôle d'un Deus ex machina, c'est-à-dire qu'en fait, on va faire de la théorie des ensembles comme on fait d'habitude, mais l'espace en question va servir de paramètre. C'est-à-dire que l'espace en question ne va jamais être au-devant de la scène, il va être derrière, et alors, ce dont on s'aperçoit lorsqu'on fait ça, c'est que toutes les propriétés de la théorie des ensembles, qui sont des propriétés ordinaires, par exemple la démonstration que je vous ai donnée du théorème de Morley, vont continuer à avoir lieu, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé le raisonnement par l'absurde, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé la règle du tiers exclus. Tous ces raisonnements-là vont continuer à marcher, c'est extraordinaire parce que ça vous donne des raisonnements qui vont marcher avec paramètre, qui vont marcher avec cet aléa, si vous voulez.

Le topos introduit un aléa, d'accord ?. Et alors maintenant, ce qui est incroyable, c'est que, de ce seul fait, la notion de vérité va devenir plus subtile. Et au lieu d'avoir seulement le vrai ou le faux, qui nous permettaient de raisonner par l'absurde, on va avoir une notion de vérité qui va être beaucoup plus nuancée, beaucoup plus subtile, que la notion ordinaire, on va continuer à travailler comme si on travaillait dans la théorie des ensembles, et ce qui me semble probable, c'est que graduellement, cette notion va nous permettre de formaliser des situations dans lesquelles de dire celui-là a raison, celui-là a tort est complètement naïf, vous voyez quand par exemple, vous voyez une discussion à la télévision ou un truc comme ça et où la notion de vérité va devenir beaucoup plus intéressante et beaucoup plus subtile, et adaptée à une situation donnée. Alors ça, ça a été fait par Grothendieck, donc, il y a la notion de vérité dans un topos, et il y a comme je vous le disais la possibilité d'avoir des nuances. Alors je terminerai en vous montrant une phrase, euh, pardon, un texte, une page de texte de langage mathématique, mais pour vous montrer la richesse, la variété du langage mathématique, dans toute sa splendeur, cette page de texte, c'est sans doute la dernière lettre que Grothendieck a écrite à un mathématicien et il est question de... il est question de paradis originel, d'algèbre topologique, de sempiternelle catégorie semi-simpliciale, de l'œil du géomètre, de faisceaux d'ensembles, d'avoir senti, etc., des topos catégoriques, etc. Donc vous voyez l'immense richesse du langage mathématique, et à quel point, justement, la portée philosophique de ce langage est quelque chose qui est souvent ignoré, mais qui est d'une puissance incomparable. Voilà, donc, je vais terminer là-dessus, merci.