

Interview d'Alain Connes
par Lucia Dora Simonelli, physicienne
à l' ICTP, à Trieste, Italie
2017.03.02

Je suis ici avec le professeur Alain Connes à l'ICTP ; il visite l'Institut à l'occasion d'un colloque ici sur la géométrie non commutative. La première question sera donc une sorte de question spécifique à l'ICTP : si vous aviez des conseils à donner aux jeunes étudiants qui souhaitent étudier les mathématiques, en particulier aux étudiants des pays en développement, quel conseil leur donneriez-vous ?

C'est difficile : vous savez, pour étudier les mathématiques, bien sûr, ce sont des défis et donc, je veux dire, j'ai toujours pensé que l'étape clé dans l'étude des mathématiques est de comprendre que, vous savez, on n'apprend pas les mathématiques. On en fait, on en fait, et jusqu'à ce que vous soyez vraiment capable de prendre un problème et de le résoudre par vous-même ou d'essayer de le résoudre par vous-même, vous ne faites pas de mathématiques. Parce que les mathématiques ne sont pas un sujet que vous pouvez apprendre ; il y a des sujets scientifiques que vous pouvez apprendre, mais ce n'est pas le cas pour les mathématiques. Pour les mathématiques, vous devez en faire vous-même. Ce serait le meilleur conseil que je pourrais donner, en très peu de temps. C'est vraiment comme... par exemple, vous savez, pour faire une comparaison, si vous essayez de devenir pianiste en lisant des livres, c'est la même histoire, il faut s'entraîner. La pratique est beaucoup plus importante que n'importe quoi d'autre, comme lire des livres, et tout ça. De cette façon, les mathématiques sont un sujet très démocratique et il y a aussi une étape clé, la magnificence de cette étape clé est qu'un étudiant peut trouver une erreur d'un enseignant, car il est capable de penser par lui-même, et de découvrir qu'il a raison, et que l'enseignant a tort ; c'est quelque chose qui est très important dans les mathématiques, et qui n'est pas présent dans d'autres sujets. Parce que les autres sujets nécessitent tellement de connaissances que, d'une manière ou d'une autre, cela ne sera pas possible pour un débutant, mais en mathématiques, c'est possible.

La prochaine question est donc de penser à cette quête pour trouver une théorie unifiée pour l'univers. Je pense que cette quête est intéressante par l'impact qu'elle a peut-être eu sur l'interaction entre mathématiques et physique. Et donc peut-être que certains ont la possibilité qu'à un moment donné un ensemble de champs en établisse un autre, mais il semble que maintenant il y ait une sorte de relation symbiotique et je voulais votre point de vue sur l'évolution des relations entre les mathématiques et la physique.

Oui, je pense que c'est une question très délicate dans le sens où il y a un Graal, un problème que les gens essaient de résoudre, qui est la gravité quantique, donc nous

Transcription d'une vidéo est visionnable ici : <https://www.youtube.com/watch?v=XxtnTtvIhMw>

savons que la gravité quantique existe, nous savons que c'est assez difficile. Mais en quelque sorte, pour les mathématiciens, du moins en ce qui les concerne, la question est encore plus importante pour les mathématiques dans le sens suivant : par exemple lorsque Riemann a donné sa leçon inaugurale, il était très clair sur le fait que l'hypothèse qu'il avait pour la géométrie riemannienne, son hypothèse pour la géométrie, ne tiendrait pas à très très petite échelle.

Et il était si lucide et précis, qu'il avait déjà prévu des développements qui viendraient beaucoup plus tard, et en particulier en géométrie non-commutative, en raison du fait qu'il pensait que la notion de (...) ou la notion de rayon de lumière n'a plus de sens dans le très très petit alors que ces notions étaient cruciales dans sa définition de la géométrie. Il y a donc une symbiose, mais il y a aussi, je dirais, des écarts, et ce que j'entends par exemple dans certaines discussions, j'entends des écarts parce que certaines personnes veulent carrément changer les règles de la physique (faire ce qu'elles veulent ? ...).

Je pense donc que nous devons être très prudents. Et en même temps, ce que je dirais, c'est qu'il y a un objectif intermédiaire pour compléter la géométrie, et cet objectif est très précis, c'est de comprendre l'effet, l'impact sur la notion de géométrie des résultats que la physique expérimentale nous a fourni en un siècle, où le voyage vers des échelles de grandeurs plus petites, qui a commencé à la fin du XIX^e, avec la découverte de l'électron et de la radio-activité. Et il a augmenté notre perception de la structure fine de l'espace-temps par un facteur de dix à la puissance huit au cours du siècle et qui a des implications sur le modèle géométrique que nous avons de l'espace-temps et cette application sera pleinement comprise en géométrie non-commutative et ce qui se passe est que l'espace-temps n'est plus un pur continuum mais c'est un mélange du continuum et du discret. Et donc ça, c'est une leçon qui a été comprise, c'est une leçon qui est très étrange, et qui a forcé à changer le paradigme riemannien. Mais ce changement de paradigme riemannien, bien sûr, Riemann ne pouvait pas le prévoir car cela implique la mécanique quantique. Donc le nouveau paradigme sur la géométrie est très proche du riemannien mais il y a des nuances, et ces nuances viennent du quantum, elles viennent du formalisme de la mécanique quantique découverte par von Neumann dans les années 1960. Et il s'est avéré alors que l'idée ou la notion que nous voulons pour l'espace géométrique devient plus naturelle, et est plus facile à comprendre dans le formalisme quantique.

Vous décrivez donc qu'il n'y a pas seulement l'immensité de l'univers mais aussi ces très petites échelles. Comment définiriez-vous un point ?

D'accord, c'est une question intéressante parce que nous pouvons poser, au sein d'une telle approche de cela, la question de savoir comment définir un point, et cette question qui est simple est de savoir comment nous communiquerions avec des extra-

terrestres ou d'autres civilisations possibles l'endroit où nous sommes. Eh bien, si je vous dis que nous sommes à Trieste, et ainsi de suite, eh bien, cela ne dit rien à aucun extra-terrestre parce que tout d'abord, ces gens ne comprennent pas ce que Trieste veut dire, et puis, si on admettait que ce sont des gens qui connaissent la relativité générale, il suffirait de leur donner nos coordonnées dans un système de coordonnées, mais c'est aussi stupide parce que quel système de coordonnées devrions-nous prendre, quelle manière invariante avons-nous de définir un tel système de coordonnées, et il se trouve que par rapport à ce dont je parlais avant, ce rétablissement de la dualité a sa réponse qui est exactement fournie par le formalisme. Donc la première question devient comment communiquer cet espace dans lequel nous sommes, juste la Terre, non pas en donnant une image, comment communiquons-nous l'espace dans lequel nous nous trouvons, et deuxième question, comment définir où nous sommes dans cet espace. Pour communiquer l'espace dans lequel nous nous trouvons, il s'avère que la meilleure façon est de donner la musique de l'espace. Donc, si vous prenez une forme, c'est une métaphore bien connue si vous voulez, qui remonte à Mark Kac, donc si vous prenez une forme, comme un tambour par exemple, des tambours de formes diverses et ainsi de suite, il s'avère que chaque tambour a selon sa forme une gamme spéciale, une gamme musicale, et dont les fréquences dépendent de la forme en question.

Et il s'avère que si vous voulez donner invariablement l'espace, vous devez donner une liste des quantités qui sont affectées à cet espace de manière invariante. Maintenant l'échelle de l'espace est invariablement définie ; vous pouvez faire pivoter l'espace, vous pouvez faire ce que vous voulez, et vous ne changerez pas son échelle. Donc, c'est un invariant de l'espace. Et il se trouve que Helmholtz a trouvé ce qu'on appelle l'équation de Helmholtz dans laquelle il utilise l'échelle de l'espace, et il s'avère qu'il y a un petit raffinement dans cette équation, Helmholtz prenait pour élément linéaire la racine carrée du laplacien, et vous devez diviser cette base par l'opérateur de Dirac, mais c'est une petite nuance. Et quand vous connaissez cette petite nuance, alors vous pouvez réellement reconstruire l'espace, mais vous devez en savoir un peu plus. Vous avez besoin d'un peu plus que l'échelle de l'espace, vous avez besoin de savoir précisément quels sont les points. Et quels sont les points ? Chaque point est défini par un accord sur l'échelle. Un point dans un espace, techniquement parlant, comment voulez-vous préciser le point ? Donc, techniquement, ce que vous faites, vous prenez ce qu'on appelle les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac, leurs valeurs sont bornées dans l'espace (...) et vous les évaluez au point. Lorsque vous les évaluez, vous ne pouvez pas simplement donner un nombre, donc vous obtenez un nombre en termes de métriques, qui sont des produits scalaires de ces différentes bases, au point, vous utilisez les métriques et il se trouve que modulo l'invariance, cette métrique est exactement ce dont vous avez besoin pour connaître le point.

Donc, l'image, l'image mentale est que l'espace est compris par une échelle musicale et des accords possibles. Et les accords possibles sont les points. Donc, d'une certaine façon, ce qui se passe, c'est que vous reconstituez l'espace par une sorte de

transformation de Fourier. Et je crois que c'est exactement ce que fait le cerveau quand vous voyez, parce que quand vous voyez, il y a des photons qui arrivent pendant un laps de temps, parce que quand vous voyez, vous avez les photons à l'échelle propre de l'espace et le cerveau reconstitue l'espace comme nous sommes habitués à le voir, mais ce qui est encore plus important, c'est que c'est exactement la façon dont nous percevons l'univers lointain. Parce que nous percevons l'univers lointain en regardant les spectres des galaxies, les spectres des étoiles, les spectres des nébuleuses, et c'est dans ce sens que les spectres peuvent calibrer les informations que nous recevons des étoiles lointaines.

Dans ce formalisme, nous découvrons que non seulement, il est utile pour les distances microscopiques mais il y a aussi des remaniements et cela change le point de vue sur les grandes distances, mais d'une manière qui est parfaitement cohérente avec nos perceptions de l'univers. Par exemple, généralement, ce qui se passe, c'est que nous savons que les choses sont très très éloignées, vous devez vous rappeler qu'il y a un certain temps, les gens ne savaient même pas qu'il y avait des choses en dehors de notre galaxie, ok, il a fallu des astronomes très courageux pour trouver cela. Mais maintenant, nous savons que les choses sont très très très éloignées, simplement à cause du décalage vers le rouge. Et ce sont encore des données spectrales qui nous le font savoir.

Et ici, il y a un concept de distance ou d'unité de longueur en termes de longueur d'onde.

Sûr. C'est aussi une étape très importante, qui est tellement amusante à expliquer parce que cela concerne des choses très concrètes. L'histoire commence donc plus ou moins en France, à la Révolution française. Vous voyez, il y avait plus ou moins une unité de longueur par ville. Il y avait des milliers d'unité de longueur. Cela signifie que là où les gens étaient, lorsqu'ils vendaient par exemple du tissu, en voyageant d'un endroit à un autre, ils devaient mesurer leur tissu par rapport à l'unité qui se trouvait à l'entrée du village, bien sûr (*rires de Lucia-Dora Simonelli*). La révolution était bien sûr une idée pour unifier les choses, et ils avaient de grands objectifs et tout ça, alors ils ont décidé de ... ils avaient de très bons scientifiques, ils ont décidé d'essayer d'unifier le système, en définissant une unité de longueur. Alors qu'est-ce ils ont fait. Ils ont pris le plus grand objet disponible, qui est la Terre, et ils ont défini l'unité de longueur de sorte que, lorsque vous multipliez cette unité de longueur par 40 000 000, vous obtenez la circonférence de la Terre. Voilà donc ce qu'ils ont essayé.

Et pour... Bien sûr, ils ne pouvaient pas aller au pôle, pour mesurer l'ensemble du méridien, ils mesureraient des angles entre des étoiles qu'ils pointaient avec leurs instruments, ils n'avaient donc besoin que de mesurer une partie angulaire du méridien. Et ils ont choisi de mesurer la portion angulaire qui était entre Dunkerque, qui se

trouve au nord de la France, et Barcelone, qui est en Espagne. Et en 1792, ce fut donc pendant la folle période de la Révolution, ils ont envoyé deux personnes. Delambre et Méchain, ont été envoyées, pour faire la chose suivante ; l'idée était qu'ils auraient d'abord une base, ce que nous appelons une base. Ils avaient donc aligné sur une distance suffisamment longue quelques barres, si vous voulez, et ils avaient pris cela comme base. Ils mesuraient seulement des angles, ce qui est une idée très intelligente. Ils mettaient des télescopes au sommet des collines et mesuraient les angles, et en faisant des triangulations, ils comparaient la base avec la distance entre Barcelone et Dunkerque. Et c'est à partir de cela qu'a été définie l'unité de longueur, qui était en fait une barre métallique. C'est une histoire très intéressante car il y a toutes sortes de développements derrière cette histoire parce que l'un des gars, je pense que c'était Méchain, devait faire des mesures en Espagne et bien sûr, donc, il mesurait les angles, en mettant le télescope au sommet de la colline, et bien sûr, il a eu beaucoup de problèmes parce que c'était en temps de guerre, une guerre entre la France et l'Espagne, à cette époque, et il a dû expliquer à l'Armée espagnole qu'en mettant son télescope au sommet de la colline et en regardant dans son télescope, il n'était pas en train d'espionner, il essayait de définir l'unité de longueur (*rires des deux*).

Il y a donc beaucoup d'anecdotes intéressantes à développer, j'adore les détails de cette histoire, je ne sais pas pourquoi. Et puis ce qui s'est passé, c'est la chose suivante. Cette unité de longueur a été déposée près de Paris, et quand j'étais enfant, j'ai appris que "L'unité de longueur est le mètre qui est déposé au Pavillon de Breteuil près de Paris.", et ainsi de suite. Donc je pensais et je suis sûr que beaucoup de gens pensaient "Ce n'est pas très pratique" parce que si vous voulez mesurer votre lit, bien sûr, ils en ont fait plusieurs exemplaires. Donc c'était la situation à l'époque. Mais ensuite, un événement très intéressant s'est produit. Il y avait donc des réunions périodiques des gens du système métrique. Et cette réunion a lieu depuis des années. Je ne suis pas sûr que la période était d'un an.

Mais vers les années 1930, ils ont remarqué qu'en fait, la barre de platine, définissant l'unité de longueur, changeait de longueur. Et comment l'ont-ils remarqué ? Ils ont remarqué ça en essayant de mesurer sa longueur très précisément, et en la comparant à la longueur d'onde du krypton pour une transition spécifique. C'était donc très mauvais, et progressivement, ils ont trouvé la bonne démarche. Et la bonne démarche, c'était bien sûr de prendre cette longueur d'onde, comme unité de longueur. Cela a pris du temps. Mais ce qui est très intéressant à savoir, c'est que maintenant, il y a des instruments qui sont si communs, vous pouvez les acheter dans un magasin, et ces instruments sont eux aussi basés sur la longueur d'onde. L'élément utilisé n'est plus le krypton. C'est le césium parce que le césium est très facilement disponible et vendu, et de plus, la longueur d'onde du césium utilisé est une micro-onde. C'est comme quand vous mettez quelque chose dans le four à micro-ondes, c'est une onde qui est de l'ordre de 3 centimètres. Et c'est un instrument qui vous permet de mesurer une longueur avec une précision allant jusqu'à 12 décimales, donc je veux dire,

c'est absolument incroyable. Et c'est maintenant ce qui est considéré comme l'unité de longueur. Bien sûr, les gens vous diront que ce n'est pas une unité de longueur, c'est une unité de temps mais en raison de la constance de la vitesse de la lumière, la vitesse de la lumière a été fixée à un nombre très précis. Donc, les choses ont évolué et maintenant, ce que vous pouvez retenir de cela, c'est qu'il y a eu un changement complet dans le paradigme parce que l'unité de longueur n'est plus un objet localisé, qui est quelque part, mais c'est une donnée spectrale. Et ça montre que le nouveau paradigme, qui vient de la mécanique quantique, qui est le paradigme de la géométrie non-commutative, qui est appelée la géométrie spectrale si vous voulez, est exactement parallèle à ce changement de paradigme en physique. C'est donc très concret. C'est quelque chose qui est très très concret et l'énorme avantage est que si nous avions, par exemple, unifier le système métrique, non pas sur Terre, mais dans la galaxie, par exemple, de façon localisée. Si vous dites aux gens : "ok, venez à Paris et comparez votre unité de longueur à l'unité de longueur que nous avons définie là-bas..." (*rires*), ils se moqueraient de vous, ils rugiraient "nous aussi, nous avons notre unité de longueur", alors que si vous dites aux gens "prenez un élément chimique". Bien sûr, le césium est un peu compliqué parce que...

Pour votre entreprise, il... Peut-être... vous avez besoin de quelque chose de très commun ...

Oui, exactement, comme l'hélium ou l'hydrogène. Je voterais pour l'hydrogène, car l'hydrogène est essentiellement présent partout, tandis que le césium ou les éléments lourds de ce genre, en fait, il faut savoir qu'ils ne viennent, non pas seulement des supernovae, mais de supernovae très, très exceptionnelles. Donc leur abondance dans l'univers n'est pas si claire, mais si vous prenez l'hydrogène par exemple, il y a des rayons spectraux d'hydrogène qui sont très précisément définis, il y aurait des modèles très spécifiques, mais alors un devrait trouver le fractionnement hyperfin, car l'avantage du fractionnement hyperfin qui est utilisé pour le césium est qu'un fractionnement hyperfin est une différence d'énergie qui est très, très petite, et ce serait dans la loi inverse, lorsque vous passez à la longueur d'onde, il va générer des micro-ondes, ce qui est beaucoup plus pratique, alors que si vous prenez une énorme différence de fréquences, comme pour une transition, vous obtiendrez une très, très petite unité de longueur et ce ne serait pas (?) bon. Ce que je dis, c'est que lorsque vous communiquez avec les gens, en envoyant une sonde, et si vous êtes en mesure de leur dire quelle est votre unité de longueur, c'est merveilleux. Et vous envoyez simplement une copie du spectre des rayons d'hydrogène et vous expliquez lequel vous voulez découvrir. Je veux dire que c'est très simple, et s'ils sont intelligents, ils comprendront, alors que si vous faites autrement, cela ne marcherait jamais.

La structure fine de l'espace-temps, vous la décrivez en termes de spectre d'un opérateur, ce qui permet ...

C'est un peu plus compliqué, comme je l'ai dit, vous savez, bien sûr, le spectre de l'opérateur vous donne l'unité de longueur, ...

Est-ce que cela vous permet, en quelque sorte, de combiner un concept discret avec un concept... ?

Eh bien, ce qui permet de combiner le discret et le continuum, c'est le fait que, essentiellement, c'est un mélange du discret et du continuum et cela résulte de ces découvertes de la physique expérimentale. Ce que ces résultats nous ont donnés, au cours du siècle, c'est exactement la structure de l'espace discret. Donc au début, l'espace discret, avec mes collaborateurs, Chamseddine, et Walter Van Suijlekom et Mukhanov, ce que nous avons trouvé, au début, nous procédions avec une approche ascendante, à savoir, nous prenions des expériences, et nous essayions de les adapter à ce qui se passait, etc., et progressivement, nous avons trouvé ce que l'espace fini devrait être, mais dans un travail récent, il y a environ 2 ou 3 ans, avec Chamseddine et Mukhanov, nous avons été très étonnés parce que nous nous posions un problème purement géométrique, qui était bien sûr motivé par la géométrie non commutative, mais qui était totalement disjoint de la physique et du modèle standard, et ainsi de suite, et en développant ce problème dans la dimension 4, nous avons trouvé exactement le même espace fini dans la même algèbre, que nous avons mis à la main précédemment. Donc, nous croyons que nous avons un morceau de la vérité.

Mais naïvement, pourquoi est-il important d'inclure ce concept discret ?

Pourquoi naïvement, est-ce important, c'est facile à expliquer en quelque sorte, mais j'ai besoin d'un morceau de papier, (*Il en prend un*). C'est très simple à comprendre. Vous voyez, pourquoi est-ce important d'avoir cette pièce discrète. C'est parce que le problème le plus évident que vous avez si vous n'avez pas cette pièce discrète, c'est que le boson de Higgs, le boson de Brout-Englert-Higgs, je connaissais bien Brout, je veux dire, il est mort juste un an avant que la particule ne soit découverte. La particule a été découverte, nous savons qu'elle est là, mais elle ne correspond pas à la norme de la géométrie, pourquoi ? Parce qu'en géométrie standard, si vous prenez une fonction sur un espace, vous la différenciez, et vous obtiendrez ce qu'on appelle un potentiel de jauge de la forme, d'accord. Pourquoi ? Parce que la différenciation dépend de la direction dans laquelle vous différenciez, c'est pourquoi vous obtenez quelque chose qui est appelé spin 1 si vous voulez, qui dépend de la direction. Mais la particule de Brout-Englert-Higgs est une particule de spin 0. Cela ne dépend donc pas de la direction. Vous vous demandez donc comment obtenir géométriquement une particule de spin 0. Imaginez maintenant qu'au lieu d'avoir juste cette variété, d'accord, il y ait un élément discret, l'élément discret est juste un élément qui dit "suis-je en haut ou suis-je en bas ?", alors maintenant, j'ai davantage d'informations, je sais si je suis en haut ou en bas. Et je prends une fonction. Cette fonction aura

un développement ici, et elle aura un développement en dessous (*montrant avec sa main les deux faces de la feuille de papier*). Ces développements ne doivent pas nécessairement être les mêmes, donc je peux différencier ma fonction en haut (*AC fait tourner sa main contre la face haute de la feuille*), et je peux la différencier en bas (*AC fait tourner sa main contre la face basse de la feuille*), mais je peux aussi prendre la différence finie entre les deux (*montrant la différence sur la tranche de la feuille*). Et la différence finie entre les deux, elle ne dépend pas de la direction que je prends. C'est le boson de spin 0, et cela correspond au boson de Brout-Englert-Higgs. Alors le boson de Brout-Englert-Higgs était un signe indubitable parfaitement clair, sur une réalité qui était présente.

Et je connaissais beaucoup Robert Brout et il était très intéressé, bien sûr, par cette interprétation, qui est de comprendre pourquoi, si vous voulez, les combats expérimentaux que les physiciens ont dû mener, parce que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, il a été obtenu après des années et des années et des années de réflexion, sur la façon de donner des masses aux particules. Donc toutes les masses des particules proviennent en fait de ce mécanisme et de ce que vous trouvez dans ce modèle que nous avons développé qui explique qu'en fait, l'ingrédient principal qui fournit les mesures des masses et l'écart des angles, et ainsi de suite, des particules, sont en fait exactement dus à l'élément de longueur pour la structure finie. Ainsi, l'élément de longueur pour la structure finie contient exactement ces informations, ce qui signifie si vous le souhaitez que dans ce modèle, vous avez un mélange de continuum et de discret. Mais le discret contient l'information sur la masse et l'écart des angles du mélange.

Merci beaucoup pour votre temps et votre exposé.