

Le point de vue d'Alain Connes¹

Dès que j'ai su compter, j'ai été fasciné par la clarté des nombres, et ce sentiment de sérénité a été amplifié à mesure que j'ai assimilé de nouvelles connaissances. Je n'ai toutefois jamais eu l'impression que les mathématiques étaient d'accès facile : ma démarche est assez lente... mais pugnace. En recherche, les mathématiciens dits «rapides», s'ils voient et formulent très vite la difficulté centrale d'un problème, ne le résolvent pas plus rapidement que les autres : une chose est d'arriver au pied du mur, une autre de le sauter. Ce qui m'attriste un peu dans la sélection par les mathématiques, c'est qu'elle est fondée sur la rapidité à résoudre des problèmes.

J'ai toujours eu le désir de vérifier mon aptitude à surmonter les difficultés ; mes collègues tenaces me sont plus sympathiques et me semblent plus productifs que ceux qui, bien que très rapides, abandonnent trop vite devant l'obstacle. J'ai résolu à 28 ans un problème sur lequel j'ai travaillé un an à temps plein et trois ans à temps partiel.

Bien sûr, il faut faire des gammes pour maîtriser la technique mathématique d'un domaine. La semaine qui suit un mois de vacances est difficile : on se sent «sale», on souffre de courbatures comme un sédentaire après un effort physique. À l'inverse, quand on est immergé dans un sujet, on en maîtrise la technique et on est à l'aise avec sa conscience de mathématicien.

La vie à Draguignan, puis à Marseille, où j'étais lycéen, me laisse un souvenir de soleil. J'aimais le baby-foot et le rugby, et je lisais assez peu : j'avais des préoccupations normales mais non supérieures. L'atmosphère parisienne me surprit : à Marseille, je n'étais pas beaucoup tracassé par mes possibilités

1. extrait d'un Dossier intitulé Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science.

intellectuelles ; à Normale et dans le milieu étudiant, tout le monde avait des préoccupations intellectuelles.

Je ne voudrais pas donner l'impression que mon enfance et mon adolescence n'ont pas été studieuses. Mes parents s'occupaient beaucoup de nous, nous faisaient réciter toutes nos leçons deux fois et ne nous accordaient, à mes frères et à moi, qu'un mois de vacances : en dehors de cette période, nous avions des devoirs à faire, ce qui créa entre nous une certaine connivence pour trouver les solutions corrigées des problèmes et les traductions des versions latines. Beaucoup de mes impressions de lycée sont des souvenirs de bon élève : l'affectueuse mais ferme discipline parentale ne laissait pas de place à l'échec. Un des problèmes actuels de l'éducation est que les parents se reposent peut-être trop sur l'école et sont trop stressés ou épuisés pour aider leurs enfants. C'est dans la disponibilité qu'il y a une inégalité sociale, plutôt que dans les capacités techniques des parents à aider les enfants. Comment s'étonner que les enfants laissés sans soutien réussissent mal ? Bien des difficultés à l'école sont d'ordre psychologique et affectif, la non-compréhension des mathématiques par exemple.

Mon examen d'entrée à l'École Normale a été picaresque : j'ai été paralysé d'incompréhension pendant la première épreuve, la composition principale de mathématiques, et j'ai rendu une feuille quasiment blanche ; j'étais obnubilé par un autre candidat qui couvrait à toute allure sa feuille de calculs. En sortant de la salle, je vis en un éclair ce que j'aurais dû faire, constatation qui acheva de me démoraliser. Si des amis ne m'avaient soutenu en m'emmenant à la plage et en me distrayant, je ne serais pas allé aux autres épreuves où je réussis suffisamment bien pour passer l'obstacle. Ainsi j'ai réussi grâce à mes copains ; nous sommes tous, un jour ou l'autre, exposés à un échec que nous surmontons plus facilement quand nous pouvons puiser dans un

réservoir affectif.

Après l'École Normale, nous habitons dans la banlieue Nord de Paris, en dehors de tout. Mes beaux-parents m'avaient prêté un bureau où je travaillais tous les jours, seul. Je me promenais beaucoup et, pendant ces promenades, je réfléchissais au problème qui m'intéressait, et qui me battait dans la tête ; lorsque j'avais trouvé quelque chose, je revenais pour l'écrire dans un de mes cahiers de travail. Une fois par semaine, j'allais à un séminaire, et quand j'avais fait une petite avancée je l'expliquais à mon directeur de thèse, Jacques Dixmier. Je vivais cette journée comme un test de ma compréhension des mathématiques, mais j'avais besoin de l'isolement pour cultiver mon propre jardin mathématique qui combinait l'algèbre et l'analyse. Cette combinaison de sujets était difficile, car elle faisait appel à des sensibilités que les mathématiciens ne développent en général pas simultanément. J'ai bien aimé cette vie qui paraît monacale, car on forme ses outils en attaquant un problème difficile, en dehors de la mode du moment.

En taupe, je m'intéressais déjà à des techniques personnelles, en dehors des sentiers battus : je traduisais les propriétés différentielles en propriétés de différences finies ; j'ai rempli des cahiers de résultats et je regardais tout à partir de ce jardin privé. Quand je suis en voyage, une de mes distractions est d'acheter un cahier ; je le choisis avec un soin maniaque, puis je l'entrepose dans un tiroir, comme un souvenir, pour l'utiliser quelques années plus tard. J'ai ainsi accédé à ce que l'on appelle la réalité mathématique en m'appropriant un petit territoire que j'ai agrandi par la suite. Plus tard, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, j'ai élargi mon champ d'intérêt de manière naturelle, avec ma méthode personnelle et polarisée de voir les choses. Il y a des domaines des mathématiques qui sont simples, mais que je ne comprends pas, car ils ne s'insèrent pas dans mon domaine de recherches.

J'ai un souvenir précis des circonstances exactes de deux de mes découvertes. Pour la première, j'avais accompagné ma femme en voiture, au lycée où elle enseigne : en revenant, alors que je pensais, croyais-je, à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis six mois s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique qui allait devenir classique, le *two by two matrix trick*. Je n'étais pas parvenu à la découverte par un raisonnement, tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé.

La seconde expérience se passe au Canada, où j'avais été envoyé au titre de la coopération. Je faisais régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour j'eus l'impression que tout pouvait se débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail. J'eus alors le sentiment de ne pouvoir exprimer ma joie ; des éléments chaotiques et incontrôlables s'organisaient en un tout cohérent.

Le mois qui a suivi a été assez pénible, car je devais remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et je naviguais d'épouvante en épouvante : ne me serais-je pas trompé ? Le résultat me comblait tellement que je ne pouvais laisser une erreur ou même un doute ; aussi je refaisais cette assez longue démonstration qui fondait mon résultat, dans le bus, quand j'étais invité à dîner, partout. Ensuite j'ai pu la montrer à des collègues. On reproche quelquefois aux mathématiciens d'être introvertis ; comment pourrait-il en être autrement, du moins pendant la période de leur vie où ils cherchent ? Pour naviguer ainsi à l'aveugle dans des zones inexplorées, il faut qu'ils soient persuadés qu'une petite lumière éclairera leurs travaux. Le parcours personnel semble métaphysique, mais il y a une différence fondamentale : la nature universelle de la réalité mathématique. Qu'est-ce que cette réalité mathé-

matique? En physique on peut définir de façon précise la réalité qui est perceptible par le grand public, même si certains objets de la physique, les particules élémentaires par exemple, ne sont pas directement accessibles aux sens. La réalité mathématique est d'assimilation plus difficile, elle s'acquiert par un sens que l'homme ne possède pas naturellement.

Pour expliquer cette réalité, il ne faut pas choisir un beau théorème car on rentre trop vite dans la technique; je choisirai plutôt les contraintes qui établissent les limites de l'univers mathématique. Comme un enfant, qui apprend à se déplacer, perçoit les contraintes du monde extérieur en se heurtant à des obstacles, le mathématicien distingue le possible de l'impossible. Abel et Galois ont démontré qu'on ne pouvait résoudre les équations de degré supérieur à 4 avec des radicaux; c'est par ces impossibilités que la réalité mathématique se manifeste et aussi par la structure harmonieuse que notre invention mathématique élabore. Ainsi la théorie des groupes rassemble en une structure une multitude d'objets et d'opérations mathématiques disparates.

À la différence de la métaphysique, la réalité mathématique est objective: elle n'est pas tangible, mais éternelle et immuable. C'est un monde virtuel non localisé dans l'espace ni dans le temps. La science la plus proche des mathématiques serait, à ce point de vue, la cosmologie qui étudie les propriétés de l'espace et d'un univers également immuable.

On peut se demander pourquoi les mathématiciens ont mis si longtemps pour résoudre des problèmes d'énoncés assez simples comme le théorème de Fermat. Je crois que c'est parce qu'ils ne s'intégraient pas de façon harmonieuse dans l'univers des mathématiques ou encore que l'on ne comprenait pas assez bien la signification du problème posé.

Distinguons, en recherche, les méthodes inductives et projectives; le théorème de Fermat a été une constatation inductive, il est vérifié par tous les nombres que l'on essaie. Les mathématiciens élaborent des structures pour cerner la vérité de façon projective, établissant des résultats jusqu'à ce que les questions non résolues et pressenties de manière inductive tombent naturellement dans leur escarcelle. C'est alors qu'ils ont l'impression que la question est bien comprise, qu'elle s'insère bien dans le corpus des mathématiques.