La géométrie de l'incertitude

Dana Mackenzie

Pour additionner ou multiplier des nombres, chacun sait que l'ordre des termes n'a aucune importance : $1 + 2 = 2 + 1$. Mais, dans la vie quotidienne comme en mathématiques, la propriété de pouvoir ainsi "commuter" sans difficulté n'est pas la règle générale. Voici plus d'un siècle et demi qu'un astronome irlandais transforma la non-commutativité en élément perturbateur des mathématiques classiques. Après avoir bousculé l'algèbre et participé à l'avènement de la physique quantique, elle est désormais au cœur des développements de la géométrie contemporaine. Serait-elle aussi cachée derrière la physique des interactions fondamentales ?

Professeur de mathématiques en premier cycle universitaire pendant des années, je suis toujours resté stupéfait du nombre d'erreurs que commettaient les étudiants à propos de la commutativité. Glissez l'expression $(x+y)^2$ dans un examen et, comme attiré par un miroir aux alouettes, même quelques-uns des meilleurs élèves la développeront en $x^2 + y^2$ (au lieu de $x^2 + 2xy + y^2$). Comme si les règles de l'arithmétique leur permettaient d'effectuer les opérations "additionner" et "élever au carré" dans n'importe quel ordre.

D'où vient cette fâcheuse habitude ? Je soupçonne qu'elle découle, en grande partie, d'une analogie incorrecte. A l'école primaire, en classe d'arithmétique, les enfants apprennent très tôt que l'ordre n'a aucune importance lorsqu'ils additionnent deux nombres. Pourquoi s'étonner si ces mêmes élèves, des années plus tard, confrontés à des expressions plus compliquées et pressés par le temps, s'en remettent inconsciemment à cette règle familière ?

Il est cependant curieux de procéder de la sorte. Après tout, hors de la salle de classe, personne ne tient la commutativité pour acquise. Lorsque l'on s'habille le matin, peu importe si on met sa montre avant ou après ses chaussures : "mettre sa montre" commute avec "mettre ses chaussures". "Mettre ses chaussettes", en revanche, ne commute pas avec "mettre ses chaussures" et même les jeunes enfants savent dans quel ordre effectuer ces gestes pour obtenir un résultat satisfaisant (quoiqu'ils puissent en décider autrement, histoire de rire un peu). En règle générale, en mathématiques, les nombres

Magazine La Recherche n° 307, Mars 1998, ©La Recherche.

commutent mais pas les opérations, ni les actions. La seconde partie de cette assertion, la non-commutativité des actions, est la pierre de touche de mathématiques peu connues, dont les implications vont du trivial au complexe. Elle sème souvent l'anarchie au cœur de théories dociles et prévisibles. Véritable farfadet théorique, elle surgit régulièrement, sous différents visages, dans les débats entourant les grands chambardements de la pensée mathématique. On la retrouve dans les bizarreries de la mécanique quantique, y compris dans le fameux principe d'incertitude du physicien allemand Werner Heisenberg. Au cours des dernières années, le sujet s'est libéré de ses origines algébriques et a permis d'élaborer une géométrie radicalement nouvelle qui, peut-être, contribuera au prochain bond en avant des physiciens vers une "théorie du tout" unifiée.

Pour se familiariser avec la non-commutativité, il faut tout d'abord savoir que toutes les opérations non commutatives ne sont pas similaires. Cela peut paraître étrange - après tout, les choses commutent où ne commutent pas, n'est-ce pas ? En fait, pas vraiment. Prenez deux navires qui lèvent l'ancre côte à côte à l'équateur. Un des navires parcourt 100 milles vers l'est puis vire de bord et couvre 100 milles vers le nord. Le second navire parcourt 100 milles vers le nord puis 100 milles vers l'est. Se retrouvent-ils au même endroit ?

Non ! Le second navire termine sa course à près d'un trentième de mille à l'est du premier. Si le trajet avait été dix fois plus long dans chaque direction, l'écart aurait atteint à peu près 32 milles - presque mille fois plus. La commutativité ne peut s'appliquer ici à cause de la courbure de la Terre ; de plus, l'erreur commise en l'appliquant dépend de la route suivie par les navires.

La non-commutativité s'impose quand il s'agit de démêler des nœuds. Alexandre le Grand, s'y essayant il y a vingt-trois siècles, finit par couper en morceaux le légendaire nœud gordien. De nos jours, les mathématiciens ne cessent d'apporter de surprenants raffinements à cette approche brutale. Grâce à la non-commutativité, John Horton Conway, de Princeton University, a pu mettre sur pied une ingénieuse méthode pour dénouer certains nœuds sans jouer du sabre.

C'est un Irlandais prodige en mathématiques, William Rowan Hamilton, qui fit entrer le fauve de la non-commutativité dans l'arène. Nommé astronome royal d'Irlande à 22 ans, il fut anobli à 30, et avait déjà atteint l'âge avancé de 38 ans lorsque, le 16 octobre 1843, il eut un trait de génie et résolut un problème qui lui résistait depuis plus d'une dizaine d'années. Hamilton fut l'un des premiers à reconnaître l'importance des nombres complexes. Il s'est ensuite acharné à découvrir de nouveaux systèmes numériques "par-delà" les nombres complexes. Observant que les nombres réels et complexes ordinaires obéissent aux règles de l'arithmétique - notamment l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication -, il espérait découvrir de nouveaux nombres exotiques ayant les mêmes propriétés. Mais, en dépit de tous ses efforts, ses recherches n'aboutirent pas (les mathématiciens savent aujourd'hui que de tels nombres n'existent pas). Hamilton comprit finalement qu'il pouvait se contenter d'un sujet de moindre envergure. Ce jour d'automne, il imagina en effet un système numérique satisfaisant toutes les règles habituelles sauf une : la commutativité de la multiplication. Il baptisa son nouveau système quaternions.

Avant même la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, les quaternions furent largement supplantés par d'autres outils plus flexibles, mais leur découverte ne manqua pas de laisser derrière elle au moins un héritage durable : les mathématiciens se sentirent libres de construire de nouvelles structures algébriques enfreignant les règles de l'arithmétique conventionnelle. Ces structures parmi lesquelles les groupes, ou l'algèbre de Clifford (cette dernière étant la plus réussie des généralisations modernes des quaternions), font maintenant partie de la panoplie du chercheur en mathématiques.

L'esprit d'Hamilton survit à travers les travaux des spécialistes contemporains de la géométrie non commutative, En supprimant la commutativité des axiomes d'un type particulier de structure algébrique découverte dans les années 1940, ils ont ouvert une voie menant à de nouveaux types d'espaces géométriques. Leurs travaux ont également été profondément influencés par un autre rebondissement qui, lié à la non-commutativité, se produisit dans le domaine de la physique.

Au début du siècle, la physique du monde subatomique semble prendre un visage de plus en plus étrange. Jusqu'alors, des particules telles que les photons et les électrons étaient considérées comme des objets ponctuels, auxquels on pouvait attribuer des nombres représentant des quantités observables, l'énergie par exemple. Puis, en 1925, Heisenberg esquisse le formalisme mathématique de la physique quantique moderne. Forts de la nouvelle théorie quantique, les physiciens passent “de l'autre côté du miroir”. Des quantités observables comme l'énergie ne sont plus décrites par des nombres mais par ce qu'on appelle des opérateurs, ou actions, agissant sur les particules. Ces dernières ne sont plus des points mais des fonctions d'onde.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les nombres réels commutent mais, en général, les actions ne le font pas. En réinterprétant ce qui est observable à l'aide d'opérateurs, Heisenberg introduisit du même coup l'idée de non-commutativité. En particulier, il découvrit que les actions “mesurer la position de” et “mesurer la quantité de mouvement de” ne commutent pas. Lorsque l'on mesure la position d'une particule, son état est perturbé de telle sorte que sa quantité de mouvement ne peut pas être connue avec une précision optimale. On peut done voir le principe d'incertitude d'Heisenberg, qui stipule que la position et la quantité de mouvement d'une particule ne peuvent pas être connues simultanément avec des degrés de précision indépendants, comme une conséquence de la non-commutativité.

Les fondateurs de la théorie des quanta firent certainement preuve d'audace à propos de la matière et de l'énergie, mais ils se montrèrent plus conservateurs et tolérants vis-à-vis de la géométrie de l'espace. Ils assimilèrent l'Univers à ce que les mathématiciens appellent une variété, quelque chose de semblable à une feuille de caoutchouc lisse et continue ne possédant ni bords ni faux plis.

Dans un sens, les variétés sont des modèles de commutativité. Que l'on mesure la position d'une particule d'abord par rapport à un axe horizontal puis par rapport à un axe vertical ou vice versa, cela n'a aucune espèce d'importance : on obtient le même résultat dans les deux cas.

Il y a à peu près une quinzaine d'années, des théoriciens commencèrent cependant à concevoir de nouveaux espaces bizarres - des espaces originaux dans lesquels même des opérations simples telles que “mesurer la distance à partir du mur arrière” et “mesurer la distance à partir du mur latéral” ne commutent pas. La non-commutativité donnant lieu à l'incertitude, il s'ensuit que ces distances ne peuvent être connues simultanément. Imaginez-vous en train de chercher vos chaussures dans un placard quantique de cet acabit.

Dès que vous connaissez leur position exacte de la gauche vers la droite, leur image se dilue dans le sens de la profondeur.

Les espaces non commutatifs ont ouvert de nouveaux horizons en géométrie, comme le fit la théorie des quanta en physique. Depuis Euclide, les spécialistes de la géométrie considéraient les points comme des éléments fondamentaux, les “atomes” à partir desquels toutes les autres structures géométriques sont construites, le combustible des fonctions - ces relations mathématiques qui transforment les points en nombres. Les spécialistes de la géométrie non commutative balaient cette tradition vieille de 200 ans et, dans la foulée d’Heisenberg, ils opèrent une refonte de la géométrie, donnant la prépondérance non plus au point, mais à la fonction - un peu comme les physiciens remplacèrent l’idée de *particule* par celle de *fonction d’onde* en physique des quanta.

Le paysage qui en résulte est un monde chimérique, un monde composé exclusivement de verbes et dépourvu de noms, un monde où les seules réalités sont des actions mais où aucun obiet (points ou particules) n’est là pour s’y soumettre. Si les mathématiciens peuvent se satisfaire d’un tel univers fictif, il n’en reste pas moins qu’ils doivent savoir en revenir pour en expliquer les retombées sur le monde observable, ils doivent pratiquer une “ingénierie inverse” et transformer les fonctions en points, jusqu’à ce que tout objet ou relation dans l’un des espaces ait une interprétation dans l’autre. Etablir une telle correspondance est en tout point similaire à ce que Conway fit lorsqu’il trouva le moyen de coder numériquement les enchevêtrements de cordes.

Le problème de la transformation inverse fut résolu en 1943 grâce à un théorème démontré par le mathématicien Israël M. Gelfand, à l’époque exerçant en Union soviétique, actuellement à la Rutgers University de New Brunswick, dans le New Jersey. La méthode utilisée par Gelfand pour reconstruire l’espace est à la fois élégante et ironique. Dans un monde où les verbes sont des objets, fit-il remarquer, les noms doivent devenir des actions. Dans un sens, Gelfand apporta une réponse mathématique à la question posée par le poète irlandais William Butler Yeats à la fin de son poème *Among School Children* : “Comment connaître le danseur à partir de la danse ?”. Les danseurs sont des points, les danses sont des fonctions. L’approche de Gelfand (qui va à l’encontre de l’entendement) suggère que “la danse précède le danseur”. Pour connaître un danseur, il suffit d’observer l’artiste en train de danser - pas seulement *une* danse, plutôt *toutes* les danses possibles.

D'après le théorème de Gelfand, il est possible de reconstruire l'espace à partir de l'univers fictif des fonctions (auquel les mathématiciens donnent le nom obscur d'"algèbre C^*- commutative") si ce dernier satisfait à une courte liste de spécifications, ou axiomes. En tête de liste vient la commutativité : la multiplication des fonctions est commutative, tout comme la multiplication des nombres réels. Supposons alors que, suivant l'idée de Hamilton, on supprime la commutativité de cette liste d'axiomes. Ce critère aboli, des fonctions jusqu'alors interdites jaillissent du système axiomatique comme d'une boîte de Pandore. Mais quelle sorte d'espace obtient-on alors ? L'exemple le plus simple en a été proposé par Alain Connes, professeur de mathématiques à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette. Connes est souvent considéré comme le père de la géométrie non commutative ; ses travaux lui ont d'ailleurs valu la médaille Fields, équivalent mathématique du prix Nobel. L'espace proposé par Connes est composé de deux points seulement.

Une fonction ordinaire opérant dans cet espace peut être représentée simplement par une paire de nombres. Mais Connes fait alors quelque chose d'extraordinaire : en inscrivant ces deux nombres dans les coins d'un tableau 2×2, il passe des fonctions ordinaires à une algèbre non commutative bien connue, l'ensemble des matrices 2×2. Or une de ces matrices a la propriété irritante d'interchanger les deux points. Cette matrice M étant néanmoins une citoyenne légitime du territoire fictif, il n'existe aucun moyen d'immuniser les points contre ses effets. Il est par conséquent impossible de distinguer les deux points. C'est bien là un principe d'incertitude !

L'exemple peut paraître badin mais il est loin d'être frivole. Connes a montré qu'en raffinant légèrement son espace à deux points, on pouvait obtenir un modèle d'univers permettant de faire des prédictions identiques à celles de la théorie physique qui unifie la force électromagnétique et la force faible responsable de la radioactivité. Connes soutient que, moyennant quelques modifications supplémentaires, il peut également incorporer la troisième force fondamentale de la physique : la force nucléaire forte.

L'essence même de l'espace quantique, on s'en souvient, est d'être "imprégné" d'incertitude. L'espace engendré par le modèle de Connes a une couleur beaucoup plus classique. Comme dans son espace à deux points, chaque point y “est jumelé” avec un alter ego indiscernable, Le déterminisme classique est maître des lieux, et l’incertitude provient uniquement du fait que l’on ne sait pas à quel point on a affaire. Mais Connes assure que cette incertitude est suffisante pour engendrer la totalité du modèle classique décrivant les interactions entre particules élémentaires.

Le modèle de Connes va encore plus loin : il permet en effet d’atteindre un niveau de prédiction inaccessible au modèle classique. En 1995, les physiciens Bruno lochum, Daniel Kastler et Thomas Schücker du Centre de physique théorique de Marseille montrèrent par exemple que, si la structure de Connes est correcte, la masse du boson de Higgs, une particule dont l’existence est prévue par la théorie peut être calculée avec précision, une fois la masse du quark top déterminée. Personne n’a encore observé le boson de Higgs, mais lochum et ses collègues pensent avoir découvert un lien entre cette particule et le quark top. *“Nous pensons,* déclarent-ils dans leur publication*, que la géométrie non commutative est sur le point de révolutionner la physique comme [...] le fit la géométrie de Riemann”.*

Connes insiste sur le fait que la géométrie non commutative est davantage qu’un simple outil facilitant l’étude de la théorie des champs quantiques. Même si elle ne permettait pas aux physiciens de réaliser leurs rêves, elle n’en resterait pas moins un outil mathématique valide et utile. Des ajouts récents au bestiaire des espaces non classiques pourraient d’ailleurs être mieux compris dans le contexte de la nouvelle formulation de Connes. La géométrie non commutative constitue par exemple un environnement naturel pour les fractales, ces figures devenues matière première du pop’art et de la science populaire. Il en est de même pour les pavages non périodiques, motifs construits à partir de formes s’imbriquant à l’infini sans laisser aucun vide et sans jamais se répéter. Pour les mathématiciens, l’aspect le plus surprenant des travaux de Connes est peut-être la facilité avec laquelle ils permettent de rassembler des concepts apparemment sans relation au sein d’une structure commune.

En géométrie non commutative, il existe une opération technique permettant de fusionner certains objets. Non sans humour, les mathématiciens l’ont baptisée en anglais *Connes fusion.* L’expression pourrait certainement s’appliquer à l’ensemble du sujet : un nouveau modèle fusionnant de nombreux cas particuliers, trop rebelles pour les géométries classiques et dont la non-commutativité est le lien caché.

Encarts et légendes des illustrations

Les nœuds de Conway

J.H. Conway s'est penché sur un type de nœuds appelés *tangles*, qu'il définit comme des enchevêtrements quelconques de deux brins dont les quatre bouts restent visibles. Par commodité, on les prend répartis sur les quatre sommets d'un carré, et deux *tangles* sont considérés comme équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant tourner l'ensemble des brins à l'intérieur du carré. Le but est de démêler les deux brins de telle sorte qu'ils finissent parallèles et horizontaux sur le carré, comme les deux barres du signe =. Conway a démontré que pour une importante classe de *tangles* baptisés *tangles* rationnels, il suffit d'une suite de deux opérations élémentaires. La première opération consiste à saisir le paquet de brins et à le faire tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'on commence avec deux cordes côte à côte mais verticales (||), *tourner* donne le signe =.
Seconde opération : *torsader*. Tout en immobilisant les deux bouts situés à gauche, on torsade les deux bouts de droite de manière à faire passer le bout du haut par-dessus celui du bas. En torsadant la conformation = on obtient un *tangle* en forme de X pour lequel le brin descendant en diagonale vers la droite passe par-dessus l'autre. Si l'on torsade le *tangle* ||, on retrouve ce même *tangle* ||. Il est facile de s'apercevoir que les opérations *tourner* et *torsader* ne commutent pas. Par exemple, si l'on tourne puis torsade le *tangle* =, on obtient le *tangle* ||. Mais si l'on torsade avant de tourner, on obtient un X.
Conway attribue à chaque *tangle* un nombre qui représente son nombre de torsades. Le *tangle* = ne comportant aucune torsade, son nombre de Conway est zéro. Ensuite, on ajoute 1 par torsade. L'opération *torsader* pour les *tangles* correspond à l'opération ajouter 1 pour les nombres. Et pour l'autre opération, *tourner* ? A première vue, faire tourner un nœud ne semble pas affecter le nombre de torsades qu'il renferme. C'est là que Conway eut une intuition étonnante : tourner un *tangle* correspond en fait à prendre l'opposé de l'inverse de son nombre de Conway ($-1/n$). Par exemple, si l'on tourne un fangle contenant trois torsades, le *tangle* obtenu possède moins un tiers de torsade (nombre de Conway $= -1/3$).

On comprend aisément que n'importe quelle fraction puisse être obtenue avec une séquence appropriée de torsades et de tours. Etonnant, non ? Peut-être, mais ça marche. Pour démêler un *tangle* rationnel quelconque, il suffit d'annuler son nombre de Conway en lui infligeant une série d'opérations appropriée peu importe comment il avait été formé. En conférence, Conway a coutume d'expliquer sa méthode en sortant deux bouts de corde et en orchestrant la danse arithmétique de quatre volontaires autour d'un carré. Vous préférerez peut-être essayer avec des lacets de chaussures. Quoi qu'il en soit, jetez un coup d'œil au *tangle* figurant sur cette page (nombre de Conway : $-3/5$). Il résulte de la séquence $torsader - torsader - torsader - tourner - torsader - torsader - tourner$. Vous pourriez bien sûr le démêler en appliquant la séquence inverse, mais vous pourriez aussi procéder de la manière suivante : *torsader* $(-3/5 + 1 = 2/5)$, puis *tourner* (-1 divisé par $2/5 = -5/2$), puis *torsader* trois fois $(-5/2 + 3 = 1/2)$, *tourner* (-1 divisé par $1/2 = -2$), et enfin *torsader* deux fois $(-2 + 2 = 0)$. Essayez !
Cette méthode fonctionne pour une raison : les manipulations correspondant à la torsade et au tour sont les reflets exacts des opérations arithmétiques utilisées pour calculer le nombre de Conway. Autrement dit, l'absence de commutativité affecte de manière similaire les opérations *torsader* et *tourner* d'une part et les opérations plus 1 et prendre l'opposé de l'inverse d'autre part. Par exemple, en prenant par deux fois l'opposé de l'inverse d'un nombre quelconque, on retombe systématiquement sur le même nombre. Transposé dans le langage des *tangles*, cela implique que tourner l'un quelconque d'entre eux deux fois d'affilée devrait redonner le même *tangle*. Pourtant, si l'on tente de tourner deux fois le *tangle* 3/5, on obtient un *tangle* d'aspect très différent. Il existe néanmoins un moyen de retomber sur la version initiale en manipulant les brins de ce dernier (voir schéma ci-dessous). On peut facilement trouver des relations plus subtiles. Par exemple, pour tout *tangle* rationnel, la séquence d'actions $torsader - tourner - torsader - tourner - torsader - tourner$ donne un *tangle* équivalent. Voyez-vous pourquoi ?

Hamilton

Passionné d'astronomie et d'optique, Hamilton est nommé astronome royal d'Irlande en 1827 à 22 ans. Egalement mathématicien, il a longtemps cherché à généraliser les nombres complexes avec des triplets de réels. Mais en 1843 il réalise soudain, lors d'une promenade dans Dublin, qu'il faut considérer des quadruplets. Sur la pierre d'un pont, il écrit alors les équations définissant les quaternions, première algèbre non commutative.

Heisenberg

En 1924, Heisenberg définit une loi de multiplication non commutative pour certaines variables quantiques décrivant la position et l'impulsion. Puis il donne les fameuses relations d'incertitude sur ces variables.

Le principe d'incertitude d'Heisenberg peut s'interpréter comme une conséquence de la non-commutativité.

Illustration par un tableau de Magritte

De même que Magritte défie les lois de la réflexion sur le miroir, la géométrie non-commutative malmène l'intuition en supprimant une habitude vieille comme le monde mathématique.

Promenades sur la sphère

Les trajectoires orange et jaune ne se terminent pas au même point, ce qui montre que les opérations "faire route de 100 milles au nord" et "faire route de 100 milles à l'est" ne commutent pas. On voit surtout que pour une distance de 1 000 milles, l'écart à l'arrivée est beaucoup plus grand. La noncommutativité n'affecte donc pas tous les résultats de la même manière.

Pour le mathématicien, cela signifie qu'il faudra modéliser les ensembles non commutatifs au cas par cas : quaternions, nœuds de Conway ou espaces de fonctions en mécanique quantique ne sont pas semblables ; il n'y a pas de non-commutativité universelle.

Non-commutativité et Alain Connes

Les spécialistes de la géométrie non commutative donnent la prépondérance aux fonctions et non plus aux points.

La géométrie non commutative est davantage qu'un simple outil facilitant l'étude de la théorie quantique des champs.

Père de la géométrie non commutative qu'il a développée à partir de 1977, Alam Connes a reçu la médaille Fields en 1982. Connes modélise l'incertitude quantique avec un espace où chaque point a un jumeau indiscernable.