Esprit de contradiction ? (Denise Vella-Chemla, 21.02.2018)

On écrit littéralement la somme $\zeta(s)$ avec $s = a + ib$.

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^a e^{-ib\ ln\ 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^a e^{-ib\ ln\ 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^a e^{-ib\ ln\ 4} + \ldots$$

Les zéros de ζ vont par 4, du fait de la symétrie par rapport à la droite critique d'une part, et de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses d'autre part.

$$\zeta(s) = \zeta(a + ib) = 0 \iff \zeta(1 - \bar{s}) = \zeta((1 - a) + ib) = 0.$$

$$\zeta(1 - \bar{s}) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} e^{-ib\ ln\ 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-a} e^{-ib\ ln\ 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1-a} e^{-ib\ ln\ 4} + \ldots$$

Les deux complexes $\zeta(s)$ et $\zeta(1 - \bar{s})$ peuvent-ils être tous les deux nuls sans que a soit égal à $\dfrac{1}{2}$, les deux formules de $\zeta(s)$ et de $\zeta(1 - \bar{s})$ n'étant différentes que par les éléments de la forme $\left(\dfrac{1}{n}\right)^k$, k réel ?

Cela ne semble pas possible lorsqu'on regarde les représentations colorées aux couleurs de l'arc-en-ciel de ζ qu'on trouve sur la toile car on constate que, verticalement, l'ordre des couleurs en se promenant sur la droite critique (dans les dendrites, ces espèces de tentacules qui viennent comme se poser sur la droite critique) est le même dans les deux demi-plans supérieur et inférieur des ordonnées. On a dû mal comprendre la représentation.