Faire le point (Denise Vella-Chemla, 25.02.2018)

Cette note est destinée à conserver la trace de réflexions éparses, une manière de faire le point.

1) Ensembles de Cantor, nombres réels, nombres premiers

Ci-dessous, un extrait du premier magazine Accromaths "Les Fractales", téléchargeable ici :
http://accromath.uqam.ca/2006/07/les-fractales/
au sujet de l'ensemble de Cantor.

"En 1883, Cantor publie son fameux ensemble triadique (ou poussières de Cantor). Pour construire l'ensemble, il prend l'intervalle [0,1] et retire le tiers central en conservant les extrémités. Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des nouveaux segments et ce, indéfiniment. Le résultat trouble à l'époque puisqu'il s'agit d'un exemple d'ensemble qui contient une quantité non-dénombrable de points mais dont la mesure est nulle."

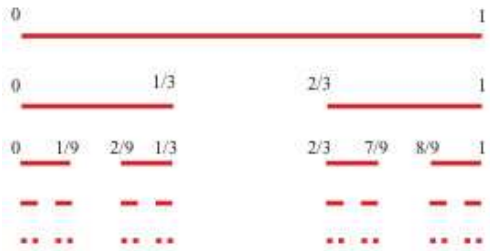

FIGURE 1 : L'ensemble de Cantor

Dans la mesure où les nombres premiers ne sont ni divisibles par 2, ni par 3, ni par 5, etc., il semblerait naturel de représenter leur ensemble par l'ensemble de Cantor suivant (on n'arrive cependant pas trop à savoir comment gérer le fait qu'un nombre premier est divisible par lui-même) :

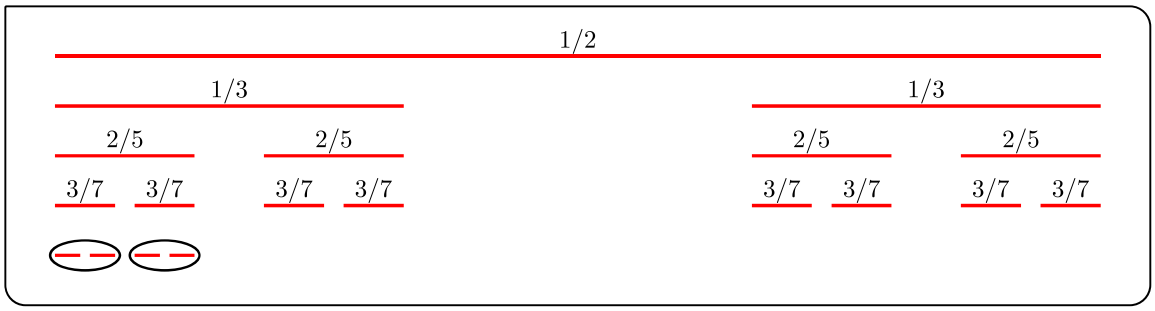

FIGURE 2 : L'ensemble de Cantor dédié aux nombres premiers

avec comme zoom sur les parties encerclées :

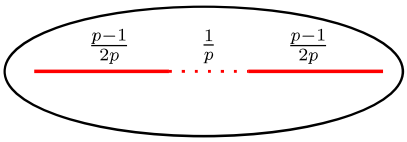

FIGURE 3 : Zoom sur les parties encerclées de la figure 2

Pour mieux cerner, si c'était possible, les points d'un tel espace, on revient au Snurpf, le Système de NUmération par les Restes dans les Parties Finies de $\mathbb{N}$. On associe à chaque entier n un réel compris entre 0 et 1 dans la partie décimale duquel sont codés les restes des divisions euclidiennes de n par l'infinité des nombres premiers. On normalise les tranches de décimales pour que les décimales correspondant aux restes des différents entiers selon un même nombre premier "tombent bien en face" : si on note $nbdigits(p)$ le nombre de chiffres de p, on réserve $nbdigits(p)$ décimales du réel pour coder le reste de la division euclidienne de n par p.

Le chiffre des dixièmes code le reste de la division euclidienne de n par 2, celui des centièmes code le reste de la division euclidienne de n par 3, les deux chiffres des 100000-èmes et millionièmes codent le reste de la

division euclidienne de n par 11. Fournir les réels associés aux nombres de 1 à 16 pour des décimales associées aux nombres premiers de 2 à 13 sera plus explicite :

$$\begin{array}{rl}
1 \rightarrow & 0,1\ 1\ 1\ 1\ 01\ 01\ \ldots \\
2 \rightarrow & 0,0\ 2\ 2\ 2\ 02\ 02\ \ldots \\
3 \rightarrow & 0,1\ 0\ 3\ 3\ 03\ 03\ \ldots \\
4 \rightarrow & 0,0\ 1\ 4\ 4\ 04\ 04\ \ldots \\
5 \rightarrow & 0,1\ 2\ 0\ 5\ 05\ 05\ \ldots \\
6 \rightarrow & 0,0\ 0\ 1\ 6\ 06\ 06\ \ldots \\
7 \rightarrow & 0,1\ 1\ 2\ 0\ 07\ 07\ \ldots \\
8 \rightarrow & 0,0\ 2\ 3\ 1\ 08\ 08\ \ldots \\
9 \rightarrow & 0,1\ 0\ 4\ 2\ 09\ 09\ \ldots \\
10 \rightarrow & 0,0\ 1\ 0\ 3\ 10\ 10\ \ldots \\
11 \rightarrow & 0,1\ 2\ 1\ 4\ 00\ 11\ \ldots \\
12 \rightarrow & 0,0\ 0\ 2\ 5\ 01\ 12\ \ldots \\
13 \rightarrow & 0,1\ 1\ 3\ 6\ 02\ 00\ \ldots \\
14 \rightarrow & 0,0\ 2\ 4\ 0\ 03\ 01\ \ldots \\
15 \rightarrow & 0,1\ 0\ 0\ 1\ 04\ 02\ \ldots \\
16 \rightarrow & 0,0\ 1\ 1\ 2\ 05\ 03\ \ldots
\end{array}$$

Le réel associé à un nombre premier p est à une distance maximale du réel associé à $p-1$, si on choisit comme distance la somme des différences des décimales "associées" (i.e. celles correspondant à la division par un même nombre premier). On n'arrive pas à voir comment il faut procéder pour ordonner correctement les éléments de l'ensemble de réels obtenu par cette représentation.

On trouve dans la littérature qu'on peut également considérer chaque entier n comme une fonction qui associe à tout nombre premier p le reste de la division euclidienne de n par p.

2) Coïncidences numériques

Après avoir constaté que $e^{2\pi} = 535.492$ ressemble à une fréquence de note de la gamme [1] et lu que "Logarithmiquement, la racine, c'est la moitié" [2], on a l'idée de calculer les valeurs de la fonction f définie sur les réels par :

$$f(x) = \frac{\left(zerozeta[x]^2 - zerozeta[1]^2\right)}{e^{2\pi}}$$

avec $zerozeta(x)$ la partie réelle du x-ème zéro de zêta [3].

Les valeurs obtenues sont étonnantes :

$zerozeta(i)$	$(zerozeta(i))^2$	$f(zerozeta(i))$	$zerozeta(i)$	$(zerozeta(i))^2$	$f(zerozeta(i))$
14.1347	199.79	0.373097	60.8318	3700.51	6.91048
21.022	441.926	0.825272	65.1125	4239.64	7.91729
25.0109	625.543	1.16817	67.0798	4499.7	8.40293
30.4249	925.673	1.72864	69.5464	4836.7	9.03226
32.9351	1084.72	2.02565	72.0672	5193.68	9.69889
37.5862	1412.72	2.63818	75.7047	5731.2	10.7027
40.9187	1674.34	3.12674	77.1448	5951.33	11.1138
43.3271	1877.24	3.50563	79.3374	6294.42	11.7545
48.0052	2304.49	4.30351	82.9104	6874.13	12.837
49.7738	2477.43	4.62647	84.7355	7180.1	13.4084
52.9703	2805.85	5.23977	87.4253	7643.18	14.2732
56.4462	3186.18	5.95001	88.8091	7887.06	14.7286
59.347	3522.07	6.57727			

1. cf http://denise.vella.chemla.free.fr/gammes.pdf.
2. Pour passer de la fréquence d'un *do* à la fréquence d'un $fa\#$, la note située à 6 demi-tons de *do* quand l'octave contient 12 demi-tons, i.e. la note "au milieu d'une gamme", on multiplie cette fréquence par $\sqrt{2}$ (il faut la multiplier par 2 pour obtenir la fréquence d'une note à l'octave).
3. Les parties réelles des zéros de zêta sont fournies par Odlyzko ici http://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/zeta$_t ables/index.html$.