Explicite les variables (Denise Vella-Chemla, 3/5/2018)

$$X_a(n) = \#\{p+q = n \textit{ tels que } p\%2 \ = \ 1,\ q\%2 \ = \ 1,\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ premiers}\}$$

$$X_b(n) = \#\{p+q = n \textit{ tels que } p\%2 \ = \ 1,\ q\%2 \ = \ 1,\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ composé et } q \textit{ premier}\}$$

$$X_c(n) = \#\{p+q = n \textit{ tels que } p\%2 \ = \ 1,\ q\%2 \ = \ 1,\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ premier et } q \textit{ composé}\}$$

$$X_d(n) = \#\{p+q = n \textit{ tels que } p\%2 \ = \ 1,\ q\%2 \ = \ 1,\ 3 \leqslant p \leqslant n/2,\ p \textit{ et } q \textit{ composés}\}$$

$$Z_a(n) = \#\{3+q \leqslant \frac{n+2}{2} \textit{ tels que } q \textit{ premier}\}$$

$$Z_c(n) = \#\{3+q \leqslant \frac{n+2}{2} \textit{ tels que } q \textit{ composé}\}$$

$$Y_a(n) = \#\{3+q \textit{ tels que} \frac{n+2}{2} < 3+q \leqslant n \textit{ et } q \textit{ premier}\}$$

$$Y_c(n) = \#\{3+q \textit{ tels que} \frac{n+2}{2} < 3+q \leqslant n \textit{ et } q \textit{ composé}\}$$

$$\delta_{2p} = 1 \iff n \textit{ est un double de composé premier } (\delta_{2p} = 0 \textit{ sinon})$$

$$\delta_{2c-imp} = 1 \iff n \textit{ est un double de composé impair } (\delta_{2c-imp} = 0 \textit{ sinon})$$

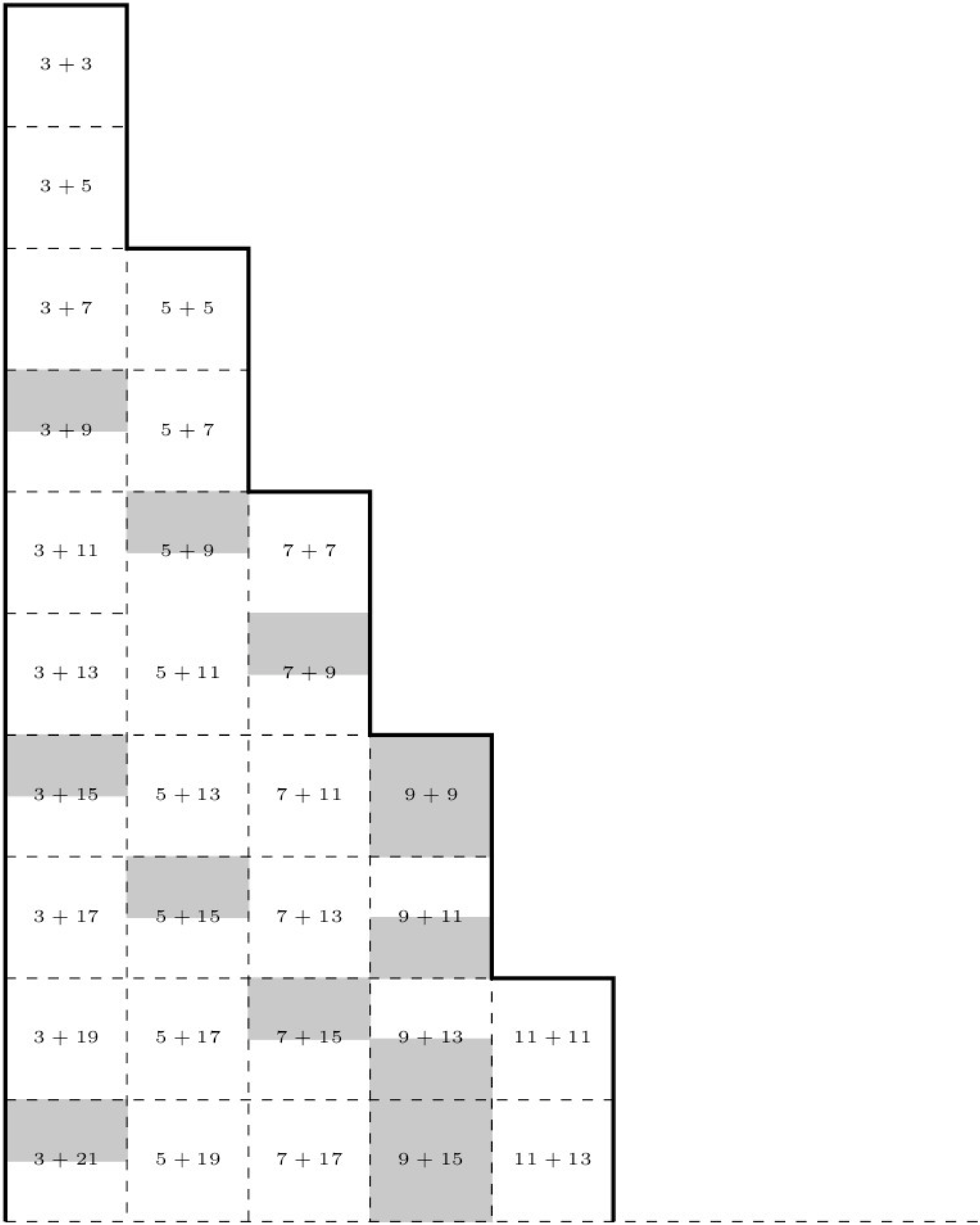
$$\delta_{4k+2} = 1 \iff n \textit{ est un double d'un nombre impair } (\delta_{4k+2} = 0 \textit{ sinon})$$

On a $\delta_{2p} \implies \delta_{4k+2}$ et $\delta_{2c-imp} \implies \delta_{4k+2}$.

1) X_d “accroché à” X_a par une différence fixe ;
2) Exercice subsidiaire a pour conséquence que X_d est de plus en plus grand.

1) et 2) ont pour conséquence qu'X_a ne peut plus être nul au-dessus de $n = 244$.

$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$


3 + 3
3 + 5
3 + 7
5 + 5
3 + 9
5 + 7
3 + 11
5 + 9
7 + 7
3 + 13
5 + 11
7 + 9
3 + 15
5 + 13
7 + 11
9 + 9
3 + 17
5 + 15
7 + 13
9 + 11
3 + 19
5 + 17
7 + 15
9 + 13
11 + 11
3 + 21
5 + 19
7 + 17
9 + 15
11 + 13

Annexe 1 : mots du langage à 4 lettres associés aux nombres pairs de 6 à 100

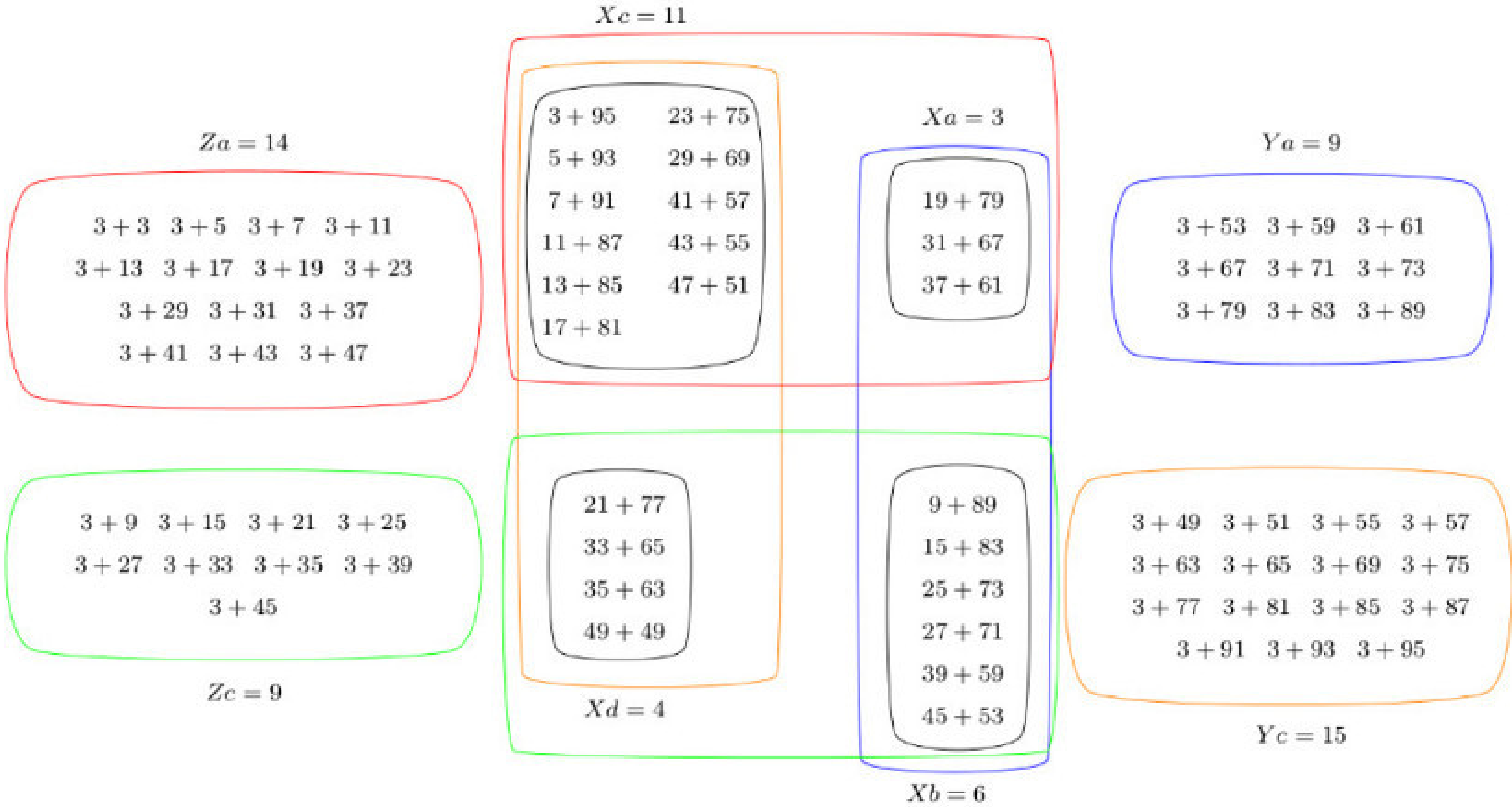
6 : a
8 : a
10 : a a
12 : c a
14 : a c a
16 : a a c
18 : c a a d
20 : a c a b
22 : a a c b a
24 : c a a d a
26 : a c a b c a
28 : c a c b a c
30 : c c a d a a d
32 : a c c b c a b
34 : a a c d a c b a
36 : c a a d c a d a
38 : c c a b c c b c a
40 : a c c b a c d a c
42 : c a c d a a d c a d
44 : a c a d c a b c c b
46 : a a c b c c b a c d a
48 : c a a d a c d a a d c
50 : a c a b c a d c a b c d
52 : c a c b a c b c c b a d
54 : c c a d a a d a c d a b d
56 : a c c b c a b c a d c b b
58 : c a c d a c b a c b c d b a
60 : c c a d c a d a a d a d d a
62 : a c c b c c b c a b c b d c a
64 : a a c d a c d a c b a d b c c
66 : c a a d c a d c a d a b d a c d
68 : c c a b c c b c c b c b b c a d
70 : a c c b a c d a c d a d b a c b d
72 : c a c d a a d c a d c b d a a d b
74 : a c a d c a b c c b c d b c a b d a
76 : a a c b c c b a c d a d d a c b b c
78 : c a a d a c d a a d c b d c a d b a d
80 : c c a b c a d c a b c d b c c b d a b
82 : a c c b a c b c c b a d d a c d b c b a
84 : c a c d a a d a c d a b d c a d d a d a
86 : a c a d c a b c a d c b b c c b d c b c a
88 : c a c b c c b a c b c d b a c d b c d a c
90 : c c a d a c d a a d a d d a a d d a d c a d
92 : a c c b c a d c a b c b d c a b d c b c c b
94 : c a c d a c b c c b a d b c c b b c d a c d a
96 : c c a d c a d a c d a b d a c d b a d c a d c
98 : c c c b c c b c a d c b b c a d d a b c c b c d
100 : a c c d a c d a c b c d b a c b d c b a c d a d

Résumé

- $X_a : p + p$
- $X_b : c + p$
- $X_c : p + c$
- $X_d : c + c$
- $Z_a : 3 + p,$ $(p < n/2)$
- $Z_c : 3 + c,$ $(c < n/2)$
- $Y_a : 3 + p,$ $(p \geqslant n/2)$
- $Y_c : 3 + c,$ $(c \geqslant n/2)$
- $\{3+p_k\}$ $Y_a = X_a + X_b$ $\{p+p_i\} \cup \{c+p_j\}$ $(p_i, p_j, p_k \geqslant n/2)$
- $\{3+c_k\}$ $Y_c = X_c + X_d$ $\{p+c_i\} \cup \{c+c_j\}$ $(c_i, c_j, c_k \geqslant n/2)$
- $\{3+p_k\}$ $Z_a = X_a + X_c$ $\{p_i+p\} \cup \{p_j+c\}$ $(p_i, p_j, p_k < n/2)$
- $\{3+c_k\}$ $Z_c = X_b + X_d$ $\{c_i+p\} \cup \{c_j+c\}$ $(c_i, c_j, c_k < n/2)$

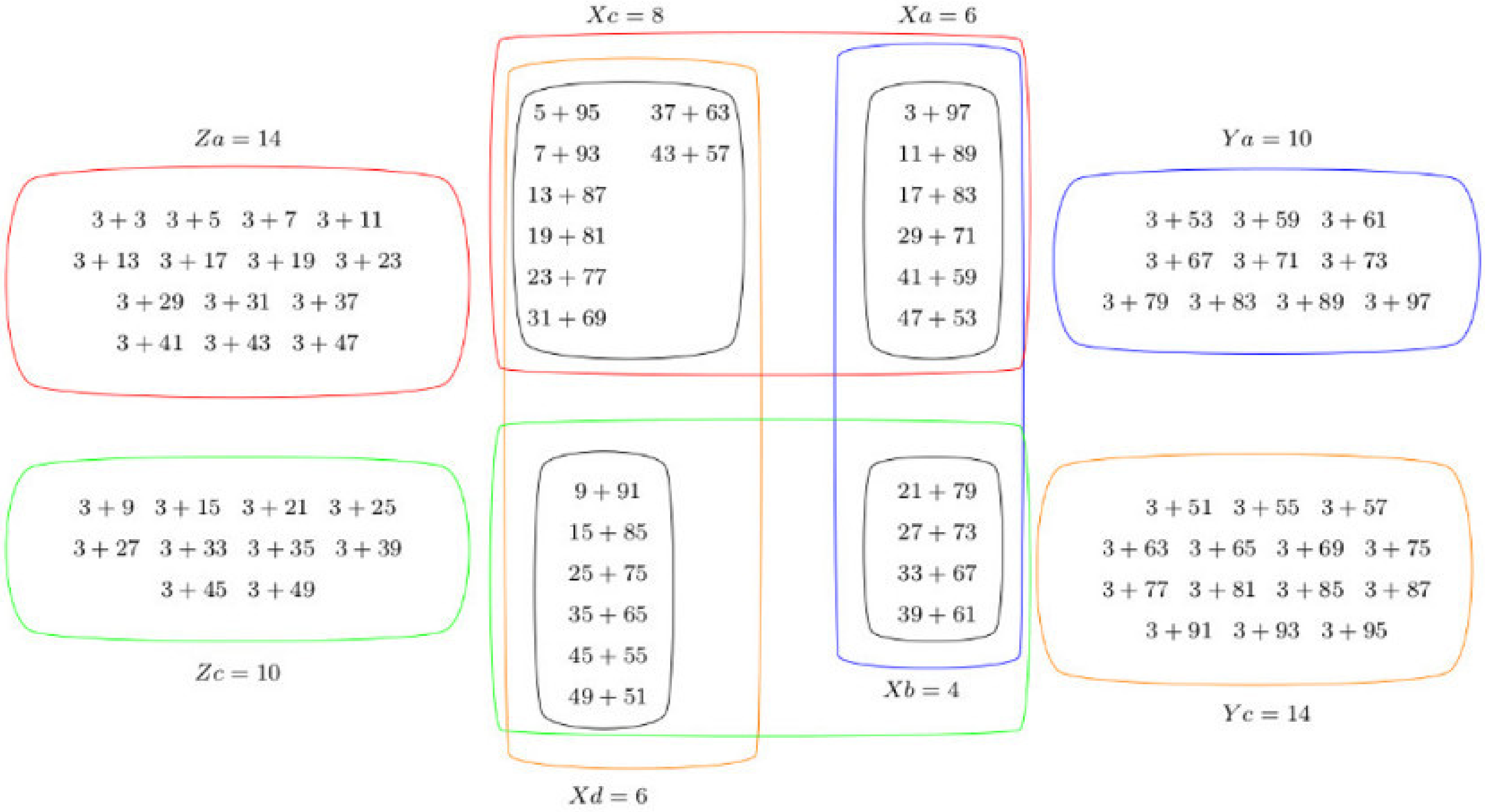
Bijections : visualisation du double comptage

- $n = 98$



Bijections : visualisation du double comptage

- $n = 100$



Bijections

- $n = 32$

$a, c \to a$ $b, d \to c$		$a, b \to a$ $c, d \to c$
$3+3$ a	$3+29$ a	$3+29$ a
$3+5$ a	$5+27$ c	$3+27$ c
$3+7$ a	$7+25$ c	$3+25$ c
$3+9$ c	$9+23$ b	$3+23$ a
$3+11$ a	$11+21$ c	$3+21$ c
$3+13$ a	$13+19$ a	$3+19$ a
$3+15$ c	$15+17$ b	$3+17$ a

$Z_a = X_a + X_c = 5$

$Z_c = X_b + X_d = 2$

$$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$$

$Y_a = X_a + X_b = 4$

$Y_c = X_c + X_d = 3$

$$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 7$$

$X_a = 2$

$X_b = 2$

$X_c = 3$

$X_d = 0$

Bijections

- $n = 34$

$a, c \rightarrow a$ $b, d \rightarrow c$		$a, b \rightarrow a$ $c, d \rightarrow c$
$3+3$ a	$3+31$ a	$3+31$ a
$3+5$ a	$5+29$ a	$3+29$ a
$3+7$ a	$7+27$ c	$3+27$ c
$3+9$ c	$9+25$ d	$3+25$ c
$3+11$ a	$11+23$ a	$3+23$ a
$3+13$ a	$13+21$ c	$3+21$ c
$3+15$ c	$15+19$ b	$3+19$ a
	$17+17$ a	$3+17$ a

$Z_a = X_a + X_c = 5$

$Z_c = X_b + X_d = 2$

$$Z_a + Z_c = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor = 7$$

$X_a = 4$

$X_b = 1$

$X_c = 2$

$X_d = 1$

$Y_a = X_a + X_b = 5$

$Y_c = X_c + X_d = 3$

$$Y_a + Y_c = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = 8$$

n	X_a	X_b	X_c	X_d	Y_a	Y_c	A	Z_a	Z_c	B	$\delta_{2p}(n)$	$\delta_{2cimp}(n)$	$\delta_{4k+2}(n)$
14	2	0	1	0	2	1	3	2	0	2	1	0	1
16	2	0	1	0	2	1	3	3	0	3	0	0	0
18	2	0	1	1	2	2	4	3	0	3	0	1	1
20	2	1	1	0	3	1	4	3	1	4	0	0	0
22	3	1	1	0	4	1	5	3	1	4	1	0	1
24	3	0	1	1	3	2	5	4	1	5	0	0	0
26	3	1	2	0	4	2	6	4	1	5	1	0	1
28	2	1	3	0	3	3	6	5	1	6	0	0	0
30	3	0	2	2	3	4	7	5	1	6	0	1	1
32	2	2	3	0	4	3	7	5	2	7	0	0	0
34	4	1	2	1	5	3	8	5	2	7	1	0	1
36	4	0	2	2	4	4	8	6	2	8	0	0	0
38	2	2	5	0	4	5	9	6	2	8	1	0	1
40	3	1	4	1	4	5	9	7	2	9	0	0	0
42	4	0	3	3	4	6	10	7	2	9	0	1	1
44	3	2	4	1	5	5	10	7	3	10	0	0	0
46	4	2	4	1	6	5	11	7	3	10	1	0	1
48	5	0	3	3	5	6	11	8	3	11	0	0	0
50	4	2	4	2	6	6	12	8	3	11	0	1	1
52	3	3	5	1	6	6	12	8	4	12	0	0	0
54	5	1	3	4	6	7	13	8	4	12	0	1	1
56	3	4	5	1	7	6	13	8	5	13	0	0	0
58	4	3	5	2	7	7	14	8	5	13	1	0	1
60	6	0	3	5	6	8	14	9	5	14	0	0	0
62	3	4	7	1	7	8	15	9	5	14	1	0	1
64	5	2	5	3	7	8	15	10	5	15	0	0	0
66	6	1	4	5	7	9	16	10	5	15	0	1	1
68	2	5	8	1	7	9	16	10	6	16	0	0	0
70	5	3	5	4	8	9	17	10	6	16	0	1	1
72	6	2	4	5	8	9	17	10	7	17	0	0	0
74	5	4	6	3	9	9	18	10	7	17	1	0	1
76	5	4	6	3	9	9	18	11	7	18	0	0	0
78	7	2	4	6	9	10	19	11	7	18	0	1	1
80	4	5	7	3	9	10	19	11	8	19	0	0	0

Intrications des variables et des écarts (invariants)

n	$X_a(n)$	$X_b(n)$	$X_c(n)$	$X_d(n)$
999 998	4 206	32 754	37 331	175 708
1 000 000	5 402	31 558	36 135	176 904
9 999 998	28 983	287 084	319 529	1 864 403
10 000 000	38 807	277 259	309 705	1 874 228

n	$Y_a(n)$	$Y_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$	$Z_a(n)$	$Z_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$	$\delta_{2p}(n)$	$\delta_{2ci}(n)$	$\delta_{4k+2}(n)$
999 998	36 960	213 039	249 999	41 537	208 461	249 998	0	1	1
1 000 000	36 960	213 039	249 999	41 537	208 462	249 999	0	1	0
9 999 998	316 067	2 183 932	2 499 999	348 511	2 151 487	2 499 998	1	0	1
10 000 000	316 066	2 183 933	2 499 999	348 512	2 151 487	2 499 999	0	1	0

Les points de l'espace Goldbach commutent-ils ? (Denise Vella-Chemla, 5.6.2017)

On rappelle l'espace qu'on a choisi pour étudier la conjecture de Goldbach. On met en regard de cet espace deux axes de coordonnées cartésiennes habituels si ce n'est que les ordonnées croissent vers le bas.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
2	$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
3	$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
4	$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
5	$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
6	$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
7	$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
8	$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
9	$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
10	$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$

La fonction suivante d permet de trouver la somme $s1 + s2$ associée à tel ou tel point du plan ($s1$ pour premier sommant et $s2$ pour second sommant).

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y-2x+3 \end{pmatrix}$$

On la représente par la matrice 3×3 : $M : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui permet d'associer au sommet du plan de coordonnées (x, y) représenté par le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ la somme $(2x+1)+(2y-2x+3)$.

On peut étudier comment inverser les sommants de la somme $s1+s2$ pour obtenir la somme $s2+s1$. On représente cette opération par la matrice 3×3 : $N : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deux façons de procéder sont envisageables :

- on a un point du plan euclidien de coordonnées (x, y), on trouve la somme associée à ce point en appliquant l'opérateur M, on inverse les sommants en appliquant N, on applique l'opérateur M^{-1} inverse de M pour trouver les coordonnées du nouveau point ;

- on applique directement aux coordonnées du point auquel est associée la somme $s1+s2$ un opérateur qui permet de trouver les coordonnées du point correspondant à la somme inversée $s2+s1$ et qui est P : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Cet opérateur correspond à une transformation affine dite *symétrie oblique* par rapport à une droite de pente -2 qui passe par les sommes triviales de la forme $x+x$ (correspondant aux décompositions triviales de Goldbach). Un point et son image ont même ordonnée par cette symétrie oblique.

On vérifie qu'on a bien $M^{-1}NM = P$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux éléments font de notre espace Goldbach un espace non-commutatif :

- d'une part, le fait que les opérateurs identifiés ci-dessus ne commutent pas. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  tandis que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

- d'autre part, on distingue la somme $s1+s2$ de la somme $s2+s1$, l'ordre des sommants étant très important pour les comptages, une décomposition de Goldbach de la forme $premier + composé$ n'étant pas comptabilisée par la même variable qu'une décomposition de la forme $composé+premier$.

Le maillage permet la visualisation des règles de réécriture
(Denise Vella-Chemla - 7/2/14)

En octobre 2005, on avait trouvé un maillage qui semblait intéressant pour visualiser les décompositions de Goldbach.

Puis on l'avait abandonné sous prétexte qu'il ne rendait pas visibles les classes de congruences d'appartenance des entiers dans les différents corps premiers.

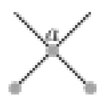
Il s'avère que ce maillage fournit la visualisation des règles de réécriture sur les mots d'un langage à 4 lettres qu'on vient tout juste de découvrir.

On rappelle :

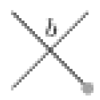
- que la lettre a est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre b est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre c est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre d est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés et $p \leqslant n/2$;

Les quatre lettres sont représentées par les petits symboles suivants :

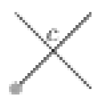
lettre a :



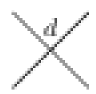
lettre b :



lettre c :

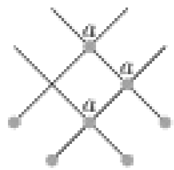


lettre d :

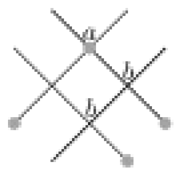


Les 16 règles de réécriture sont alors aisées à retrouver :

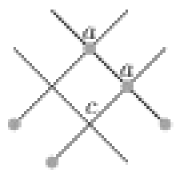
1) règle $aa \to a$:



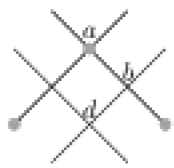
2) règle $ab \to b$:



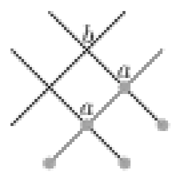
3) règle $ac \to a$:



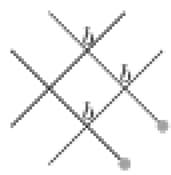
4) règle $ad \to b$:



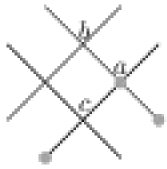
5) règle $ba \to a$:



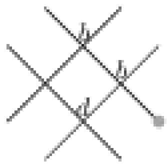
6) règle $bb \to b$:



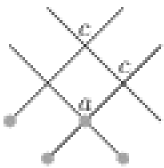
7) règle $bc \to a$:



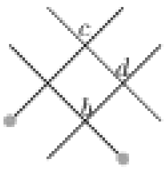
8) règle $bd \to b$:



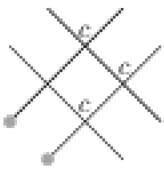
9) règle $ca \to c$:



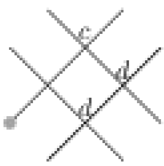
10) règle $cb \to d$:



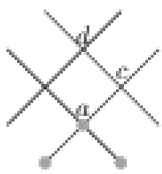
11) règle $cc \to c$:



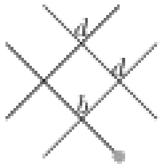
12) règle $cd \to d$:



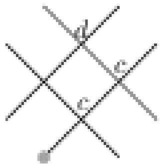
13) règle $da \to c$:



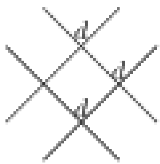
14) règle $db \to d$:



15) règle $dc \to c$:



16) règle $dd \to d$:



On peut ainsi "lire verticalement" les mots sur notre alphabet de 4 lettres associés aux nombres pairs successifs (les décompositions de Goldbach sont indiquées par les lettres a rouges).

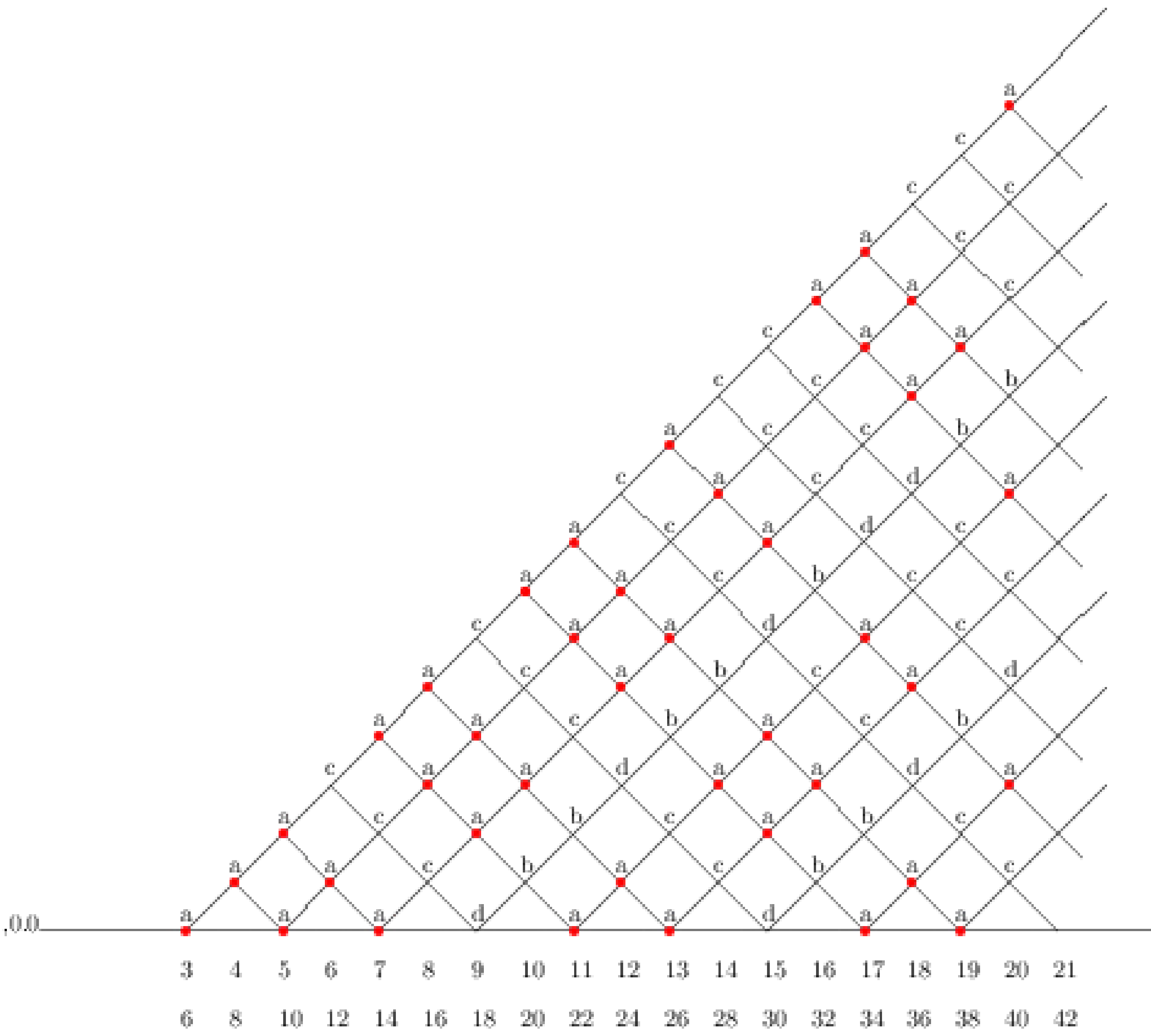


Figure 1 – Le treillis Goldbach

Continuer de suivre Galois (DV - 21/12/2013)

On cherche une équation polynomiale qui aurait ses racines qui se verraient permutées par une certaine fonction et dont les solutions seraient les décomposants de Goldbach de n, un nombre pair, i.e. les nombres premiers dont les complémentaires à n seraient premiers également.

On "sent bien" que le générateur doit sûrement être la fonction $f : x \mapsto n - x$ car cette fonction envoie chaque nombre entier sur son complémentaire à n, la somme de ces deux nombres permettant d'obtenir n.

On trouve donc l'inéquation polynomiale $x^2 - nx \neq 0$ qui est invariante par la fonction f. En effet, $(n-x)^2 - n(n-x) = x^2 + n^2 - 2nx - n^2 + nx = x^2 - nx$. On est conforté dans cette idée par le fait que le polynôme proposé est égal à $x(n-x)$:

- d'une part, ce polynôme s'annule lorsque x est nul et la congruence $x \not\equiv 0 \ (mod\ p_i)$ dans tous les corps premiers $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ pour p_i un nombre premier quelconque inférieur à $\sqrt{n}$ correspond au fait que x est un nombre premier supérieur à $\sqrt{n}$;

- d'autre part, ce polynôme s'annule lorsque $x = n$ et la congruence $x \not\equiv n \ (mod\ p_i)$ dans tous les corps premiers $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ pour p_i un nombre premier quelconque inférieur à $\sqrt{n}$ correspond au fait que le complémentaire de x à n est premier.

Il faudrait pour prouver la conjecture de Goldbach être assuré que cette inéquation polynomiale $x^2 - nx \neq 0$ a une solution commune inférieure à $n/2$ dans tous les corps premiers $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ avec p_i un nombre premier quelconque inférieur à $\sqrt{n}$.

Traitons l'exemple de la recherche des décompositions de Goldbach de 98.
Le polynôme $x^2 - 98x$ est égal à $x^2 - 2x$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tandis qu'il est égal à $x^2 - 3x$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ou encore égal à x^2 tout simplement dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ puisque 7 divise 98.

Notons dans un tableau pour les nombres premiers supérieurs à $\sqrt{98}$ et inférieurs à 49 la moitié de 98 les valeurs des polynômes en question et voyons ceux qui sont éliminés dans chacun des corps premiers.

	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
x^2 (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)	121	169	289	361	529	841	961	1369	1681	1849	2209
$x^2 - 2x$ (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)	$\cancel{99}$	143	$\cancel{255}$	323	$\cancel{483}$	$\cancel{783}$	899	1295	$\cancel{1599}$	1763	$\cancel{2115}$
$x^2 - 3x$ (dont on teste la nullité dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$)	88	$\cancel{130}$	238	304	$\cancel{460}$	754	868	1258	1558	$\cancel{1720}$	2068

On voit que ne sont conservés que les nombres 19, 31 et 37 qui sont comme attendu les décomposants de Goldbach de 98.

Le problème de Goldbach est en quelque sorte un problème "relatif" (puisqu'à la recherche des décomposants de Goldbach de n le nombre n intervient dans l'inéquation dont il faut chercher une solution commune dans tous les corps finis $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ pour $p_k \leqslant \sqrt{n}$).

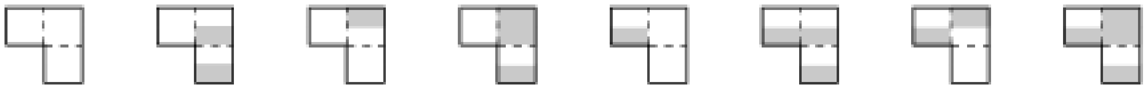
On peut considérer que le problème des jumeaux est quant à lui le problème "absolu" correspondant au problème "relatif" de Goldbach. En effet, si l'on appelle "père de jumeaux" le nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux (par exemple 18 entre 17 et 19 ou encore 570 entre 569 et 571), ce nombre doit vérifier l'inéquation "absolue" $x^2 \not\equiv 1 (mod\ p_k)$ pour tout $p_k \leqslant \sqrt{x+1}$ (il doit en effet vérifier simplement $(x-1)(x+1) \not\equiv 0 (mod\ p_k)$ pour qu'$x - 1$ et $x + 1$ soient premiers tous les deux). Un père de jumeau est obligatoirement de la forme $6k$. Fournissons dans un tableau la classe de congruence de x^2 selon les modules premiers impairs inférieurs à $\sqrt{x+1}$ qui nous permettent d'aisément trouver les pères de jumeaux jusqu'à 300.

père	*mod* 3	*mod* 5	*mod* 7	*mod* 11	*mod* 13	*mod* 17	*jumeaux*
6							(5,7)
12	0						(11,13)
18	0						(17,19)
24	0	1					
30	0	0					(29,31)
36	0	1					
42	0	4					(41,43)
48	0	4	1				
54	0	1	4				
60	0	0	2				(59,61)
66	0	1	2				
72	0	4	4				(71,73)
78	0	4	1				
84	0	1	0				
90	0	0	1				
96	0	1	4				
102	0	4	2				(101,103)
108	0	4	2				(107,109)
114	0	1	4				
120	0	0	1	1			
126	0	1	0	3			
132	0	4	1	0			
138	0	4	4	3			(137,139)
144	0	1	2	1			
150	0	0	2	5			(149,151)
156	0	1	4	4			
162	0	4	1	9			
168	0	4	0	9	1		
174	0	1	1	4	12		
180	0	0	4	5	4		(179,181)
186	0	1	2	1	3		
192	0	4	2	3	9		(191,193)
198	0	4	4	0	9		(197,199)
204	0	1	1	3	3		
210	0	0	0	1	4		
216	0	1	1	5	12		
222	0	4	4	4	1		
228	0	4	2	9	10		(227,229)
234	0	1	2	9	0		
240	0	0	4	4	10		(239,241)
246	0	1	1	5	1		
252	0	4	0	1	12		
258	0	4	1	3	4		
264	0	1	4	0	3		
270	0	0	2	3	9		(269,271)
276	0	1	2	1	9		
282	0	4	4	5	3		(281,283)
288	0	4	1	4	4		
294	0	1	0	9	12	8	
300	0	0	1	9	1	2	

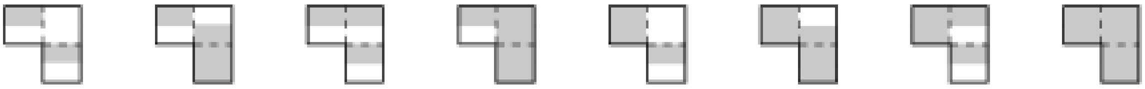
Espace des nombres premiers et pavage apériodique du plan par des triminos bicolores (Denise Vella-Chemla, 22.5.2017)

On voudrait ici associer à un ensemble de règles de réécriture qu'on avait mises au jour dans le cadre de recherches d'une démonstration de la conjecture de Goldbach un pavage du plan euclidien par des triminos bicolores.

Voici les triminos dont on dispose, au nombre de 16.

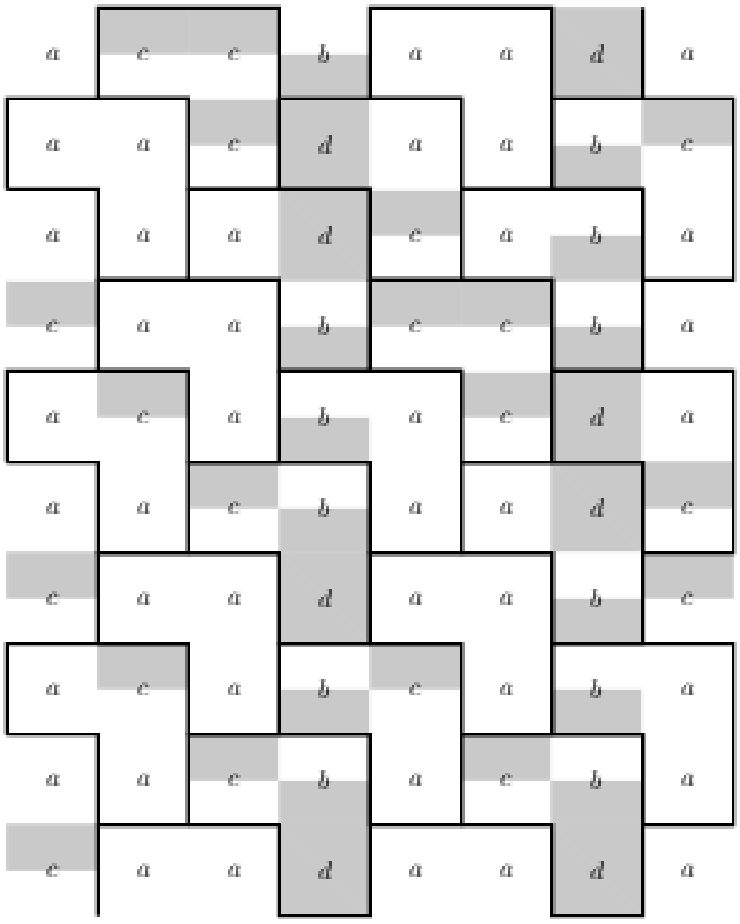


$aa \to a$ $ab \to b$ $ac \to a$ $ad \to b$ $ba \to a$ $bb \to b$ $bc \to a$ $bd \to b$



$ca \to c$ $cb \to d$ $cc \to c$ $cd \to d$ $da \to c$ $db \to d$ $dc \to c$ $dd \to d$

Voici un pavage du plan à l'aide de ces triminos.



Les couleurs sont à comparer aux couleurs associées aux décompositions des nombres pairs comme sommes de deux nombres impairs comme présenté sur le schéma ci-après :

- une décomposition de la forme *premier* + *premier* (lettre a) est colorée en blanc ;
- une décomposition de la forme *composé* + *premier* (lettre b) est colorée en gris dans sa partie moitié inférieure et blanc dans sa partie moitié supérieure ;
- une décomposition de la forme *premier* + *composé* (lettre c) est colorée en blanc dans sa partie moitié inférieure et gris dans sa partie moitié supérieure ;

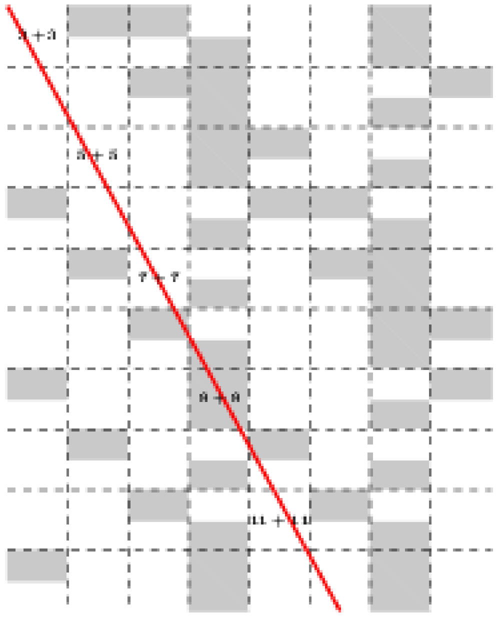
- et enfin, une décomposition de la forme *composé* + *composé* (lettre d) est colorée en gris.

$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$

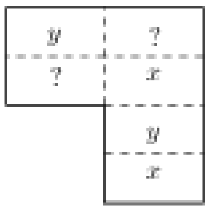
Les couleurs des triminos, qu'on appelait les 16 règles, sont motivées par toutes les implications logiques qui font que si $n = x_1 + y_1 = (x_1+2) + (y_2 - 2)$ alors $n + 2 = (x_1+2) + y_1$. Cela correspond au fait que la couleur du carré en bas à droite de chaque trimino est complètement déterminée par les couleurs des deux carrés en haut du trimino[1].

On peut lire les décompositions triviales de Goldbach de la forme $2p = p + p$ sur une droite de coefficient directeur -2.

[1] Dit autrement, la couleur d de la décomposition $9+15$ se déduit des couleurs c et b des décompositions $7+15$ et $9+13$ en prenant la "composante gauche" de la couleur de $9+13$ (le gris) et la "composante droite" de la couleur de $7+15$ (le gris aussi).

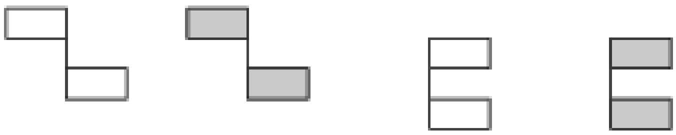


On peut ajouter que tous les triminos, abstraction faite de la bicoloration sont en fait d'une seule forme et leur bicoloration est telle que la couleur x est la même aux 2 endroits indiqués et la couleur y est la même aux deux autres endroits indiqués sur la figure ci-après. Les points d'interrogation dans les autres petits triangles du trimino indiquent que les contraintes portant sur les couleurs en question ne sont pas associées au trimino considéré. Il faut que toutes les contraintes des triminos soient respectées lorsqu'on on décale les bordures des triminos des 3 seules façons possible, la bicoloration restant fixe : prenons l'un des 3 sous-carrés des triminos, par exemple celui en haut à gauche ; selon le premier choix de bordure, il sera effectivement en haut à gauche du trimino qui le contient, selon le deuxième choix de bordure, il sera en haut à droite et selon le troisième choix de bordure, il sera en bas à droite.



Les seuls pavages qui nous intéressent sont ceux dans lesquels tous les triminos sont dans l'orientation qu'on a proposée (on ne pave pas en mettant les deux sous-carrés en bas par exemple). Cela oblige à paver "en diagonale".

Dans la mesure où on peut paver le plan avec des tuiles pouvant être constituées de plusieurs morceaux [2], le problème peut être simpifié en n'ayant à sa disposition que 4 tuiles de 2 formes différentes, chacune des deux couleurs possibles et qui contraindraient le pavage aux contraintes sur x et y vues ci-dessus. Les voici :



Bibliographie

[1] D. Vella-Chemla, *Modéliser*, 31.10.2015, http://denise.vella.chemla.free.fr/champ-de-lettres.pdf.

[2] A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Dunod, 1990.

[3] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman and company, New York, 1987.

[2] tuiles qui ne sont pas des disques topologiques ?