Etude de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

15 Juin 2009

1 Fondations

Dans cette section, nous commençons par définir une fonction récursive binaire sur les entiers f qui compte certains caractères de divisibilité, puis nous fournissons une fonction binaire *majorant* qui majore f, et nous étudions la croissance de la fonction *majorant*.

Soit la fonction récursive $f(i,k)$ définie de la façon suivante pour i et k variant de 1 à l'infini.

Définition 1.1 (Définition de la fonction binaire f)

$$f(4(2k+1)i+2a,k) = \begin{cases} i & \text{si } a = 0 \\ f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } a = 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k) & \text{si } 1 \leq a < 2k+1 \\ 2.f(4(2k+1)i,k)+1 & \text{si } 2k+1 < a < 4k+2 \end{cases}$$

Théorème 1.1 (Calcul du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$\sum_{\substack{i\ impair \\ 3 \leq i \leq \lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}} (2k+1 \mid i) \vee (2k+1 \mid 2x-i)$$

$2x$ étant fixé, pour tout i compris entre 1 et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, la valeur de $f(2x,i)$ est majorable.

Théorème 1.2 (Majoration du nombre de divisibles par $2k+1$)

$$f(2x,i) \leq 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1$$

Définition 1.2 (Définition de la fonction binaire *majorant*)

$$majorant(2x,i) = 2\left\lceil \frac{2x}{8i+4} \right\rceil - 1.$$

Selon i, la fonction $majorant$ est une fonction croissante de $2x$.

Théorème 1.3 (Croissance de la fonction binaire $majorant$)

$$\forall\, x \;\geq\; 12,\; \forall\, y \;\geq\; 12,\; \forall\, 1 \;\leq\; i \;\leq\; \lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$
$$2x \;\geq\; 2y \;\Rightarrow\; majorant(2x, i) \;\geq\; majorant(2y, i)$$

2 Ordre lexicographique sur les numérateurs des rationnels associés à $2x$

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.
On pose $\mathbb{N}uplets = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$, la réunion de tous les produits cartésiens finis construit sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ contient uniquement le singleton vide).

On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets$ de la façon suivante.

Soient $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $b = (b_1, \ldots, b_q)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{N}uplets$, et soit m le plus petit des deux entiers p et q.

$a < b$ si et seulement si
$(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) < (b_1, \ldots, b_m)$ (pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}uplets_m$)
ou $(\mathrm{a}_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ et $m < q$ (c'est-à-dire $p < q$).

Définition 2.1 (Définition du n-uplet des numérateurs associé à $2x$)

$Numérateurs(2x) \;=\; (n_1, \ldots, n_k)$ *avec* $1 \;\leq\; k \leq\; \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ *et* $n_i \;=\; majorant(2x, i)$.

Théorème 2.1 (Ordre lexicographique sur les n-uplets des numérateurs)

$$\forall\, x \;\geq\; 12,\; \forall\, y \;\geq\; 12,\; 2x \;\geq\; 2y \;\Rightarrow\; Numérateurs(2x) \;\geq\; Numérateurs(2y)$$

Définition 2.2 (Définition de l'ensemble de probabilités majorantes associé à $2x$)

$$ProbasMajorées(2x) = \left\{ \frac{majorant(2x, k)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

On a $Card(ProbasMajorées(2x)) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Et, de fait, $Card(ProbasMajorées(2x+2)) = Card(ProbasMajorées(2x)) + 1$ lorsque $2x+2$ est le double d'un carré, sinon $Card(ProbasMajorées(2x+2)) = Card(ProbasMajorées(2x))$.

Définition 2.3 (Définition de la fonction *poincaré***)**

$$poincaré(2x) = crible(ProbasMajorées(2x))$$

Définition 2.4 (Définition récursive de la formule du crible de Poincaré)

$$\begin{cases} crible(\emptyset) = 0. \\ crible(\left\{\dfrac{p}{q}\right\} \cup E) = \dfrac{p}{q} + crible(E) - \dfrac{p}{q}.crible(E). \end{cases}$$

On obtient une majoration du résultat de l'application de la formule du crible à l'ensemble $ProbasMajorées(2x)$, et ce pas à pas de 2x à 2x+2 selon la formule de récurrence :

Théorème 2.2 (Majoration de la formule du crible : formule de récurrence)

$$poincare(2x{+}2) < poincare(2x){+}2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor + 4} \right\rceil {-}1{+}\frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor}$$

On en déduit une majoration pour tout $2x$ du résultat de l'application de la formule du crible de Poincaré à l'ensemble des probabilités majorées.

Théorème 2.3 (Majoration globale de la formule du crible)

$$poincare(2x) \begin{cases} = 0.872 & \text{si } x \ = \ 12 \\ < 0.872 + 2\left\lceil \frac{2x}{8\lfloor\sqrt{x}\rfloor+4} \right\rceil - 1 + \frac{2(nombre\ de\ diviseurs\ de\ 2x\ de\ la\ forme\ 8x+4)}{\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor} & \text{si } x \ > \ 12 \end{cases}$$

Définissons $moitie = \left\lfloor \dfrac{x-1}{2} \right\rfloor$.

Théorème 2.4 (minoration du nombre de décomposants de Goldbach)

$\forall\ 2x \ \geq\ 24,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \ \geq\ (1{-}poincare(2x))moitie$

Théorème 2.5 (Conclusion)

$$\forall\ 2x \ \geq\ 68,\ nombre\_de\_décomposants\_de\_Goldbach(2x) \ \geq\ 1.$$

Annexe : nouvelle caractérisation des nombres premiers

On n'a pas utilisé les nombres exacts de divisibles pour étudier la conjecture de Goldbach mais on va les utiliser maintenant pour obtenir une nouvelle caractérisation des nombres premiers.

Définition 2.5 (Définition de l'ensemble des nombres exacts de divisibles associé à $2x$)

$$Exact(2x) = \left\{ f(2x, k), 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Définissons la fonction booléenne *double* qui renvoie *vrai* si l'un des n-uplets est "un peu" le double de l'autre

Définition 2.6 (Définition de la fonction *double*)

$$double(2x, 2y) \iff \left\{ \begin{array}{l} Exact(2x) = (a_1, \dots, a_m), \\ Exact(2y) = (b_1, \dots, b_n), \\ \forall\, 1 \ \leq i \leq \ min(m, n), \ a_i \ = \ b_i \ ou \ a_i \ = \ 2.b_i. \end{array} \right.$$

$$Premier(x) \iff \exists\, k \ \geq \ 6, (\ x = 2k+1) \wedge (double(Exact(2x), Exact(2x-2))).$$