Lettre XLIII : de Goldbach à Euler du 7 juin 1742

Moscau d. 7 Juni n. st 1742.

Ohngeachtet ich mich in meinem vorigen Briefe mit der particula vielleicht précautionniret, so hätte doch nicht geglaubet, dass die Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den divisoribus numeri p sollte dividiren lassen, wenn solches nicht durch das von Ew. angeführte exemple deutlich bestätiget würde.

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe dir Formul $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, posito $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, als applicatas einer curvae serpentiformis, deren abscissae x sind, vorgestellet, und welche den axem so oft durchschneidet, als die Formul $= 0$ wird, so dass, wenn die formula ipsa $= 2$ ist, die applicata maxima unten oder oben herauskommt, folglich unzählige andere applicatae unter sich gleich seyn müssen ; nichts desto weniger ist in meiner damaligen Expression ein Fehler eingeschlichen, den Ew. mit Recht angemerket haben, und leicht verbessert werden kann, indem es heissen sollen, dass wenn q ein numerus quicunque und $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ gesetzet wird, alsdann posito pro n integro quocunque, seyn werde.

$$2^{(8n-4-q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$$

Ew.haben gefunden, dass alle Zahlen, so nicht $4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul begriffen sind $v^2 + v + u^2$, und ich finde, dass alle $4mn - m - n$ zu dieser Formul $y^2 + y - x^2$ gebracht werden können, so dass eine jede gegebene Zahl gleich ist $p^2 + p \pm q^2$, woselbst p et q numeros integros anzeigen, oder auch eine von beiden litteris 0 bedeuten kann ; woraus zu sehen ist, dass eine jede Zahl aus einem duplo numeri triangularis $\pm$ numero quadrato bestehet. Weil aber auch eine jede Zahl gleich ist der Formul

$$u^2 + v^2 + v + y^2 + y - x^2$$

so wird, wenn man setzet $u = \dfrac{z^2+z}{4} + 1, x = \dfrac{z^2+z}{4} - 1, u^2 - x^2 = z^2 + z$, folglich jedes numeri dati dimidium

$$\frac{n}{2} = \frac{v^2 + v + y^2 + y + z^2 + z}{2},$$

id est tribus trigonalibus.

Dass in der formula polygonalium $\dfrac{(p-2)x^2 - (p-4)x}{2}$, wenn sie gleich werden soll $4mn - m - n$, p weder 5 ± 2 noch 5 ± 1 seyn könne, sondern alle trigonales, tetragonales, hexagonales und heptagonales ausgeschlossen werden, folget ex iisdem principiis.

Ich halte es nicht für undienlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet, denn wenn sie auch nachmals falsch befunden werden, so können si doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit Gelegenheit geben. Des Fermatii Einfall, dass jeder numerus $2^{2^{n-1}} + 1$ eine seriem numerorum primorum gebe, kann swar, wie Ew. bereits gezeiget haben, nicht bestehen ; es wäre aber schon was Sonderliches, wenn diese series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe. Auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren : dass jede Zahl, welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatum[1]) ; zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+3 \\ 1+1+2 \\ 1+1+1+1 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases}$$

$$6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

[1]Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu $n+1$, si successerit in casu n, et $n+1$ dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.

Hierauf folgen ein Paar observationes, so demonstriret werden können:

Si v sit functio ipsius x ejusmodi, ut facta $v = c$ numero cuicunque, determinari possit x per c et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x in aequatione

$$v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}.$$

Note marginale d'Euler :

$$\begin{array}{r}
v^{2n+1} - (vv+v)(v+1)^{n-1} \text{ divisib. per } vv - v - 1 \\
\text{addatur } (vv-v-1)(v+1)^{n-1} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} \text{ divisib. per } vv - v - 1
\end{array}$$

Si concipiatur curva cujus abscissa sit x, applicata vero sit summa seriei $\dfrac{x^n}{n.2^{2n}}$, posita n pro exponente terminorum hoc est, applicata $= \dfrac{x}{1.2^2} + \dfrac{x^2}{2.2^4} + \dfrac{x^3}{3.2^6} + \dfrac{x^4}{4.2^4} + etc.$, dico, si fuerit abscissa =

1, applicatam fore $= \frac{1}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} = l\frac{4}{3}, \text{ nam sit haec applicata = y,} \\ \text{erit } y = l.\frac{4}{4-x} \end{array} \right.$ *Note marginale d'Euler*

2 ...... $l2$

3 ...... $2l2$

4 vel major... infinitam.

Goldbach.

P. S. Die beiden andern formulas numerorum non quadratorum, deren Ew. Erwähnung thun, habe ich noch nicht untersuchet, ich glaube aber, dass selbige, wenn man setzet

$$a = hx + k, b = lx + m, c = nx + p$$

sich wohl möchten unter nachfolgende Formul rangiren lassen, allwo f, g, γ, δ numeri integri affirmativi sind

$$\begin{array}{ccc} (2f - 4\gamma\delta) & x^2 + 4(f - 2\gamma\delta)(2g - \delta^2) & x + (2g - \delta^2)^2 \\ -4\gamma^2 & -2f & -2g \end{array}$$

denn diese kann niemals ein quadratum geben.....

Positis m et p numeris integris affirmativis, haec expressio $\dfrac{p + 2 \pm \sqrt{4p - m + 3}}{m}$ non potest fieri numerus integer.