Juste cause (Denise Vella-Chemla, 5.12.2019)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. Fixons un nombre pair n supérieur à 4, double d'un nombre composé (car les doubles de nombres premiers vérifient trivialement la conjecture). Pour tout nombre premier p_k entre 3 et $\sqrt{n}$, notons $F(p_k, n)$ l'ensemble des entiers m qui sont :

i) impairs,

ii) compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$,

iii) non congrus à 0 modulo p_k (i.e. non divisibles par p_k),

iv) non congrus à n modulo p_k (i.e. le reste après division de m par p_k n'est pas égal au reste après division de n par p_k).

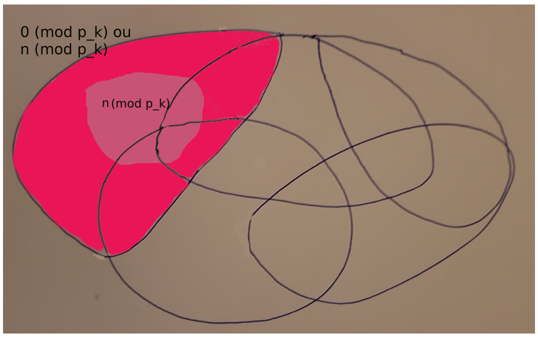
On pose maintenant $D(n) = \cap F(p_k, n)$, c'est l'intersection des ensembles $F(p_k, n)$ pour tous les premiers p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$.

A été démontré dans http://denisevellachemla.eu/aide-Leila-Schneps.pdf que si $D(n)$ est non vide, il ne contient que des nombres premiers qui sont décomposants de Goldbach de n et qu'alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Voyons pourquoi $D(n) = \cap F(p_k, n)$ ne peut être vide. On reprend l'écriture initiale qu'on avait choisi, sous forme logique : dire que l'intersection des ensembles de la forme $\{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\}$ est vide, ce que l'on note $\bigwedge_{p_k} \{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \varnothing = \bot$ (le symbole $\bot$ est le symbole logique pour *False*), est équivalent à dire que le complémentaire de cet ensemble est le "plein" (dénoté par $\top$, ou *Vrai*), i.e. couvre l'ensemble de tous les impairs de 3 à $n/2$.

$$\complement \bigwedge_{p_k} \{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \bigvee_{p_k} \{0_{p_k} \vee n_{p_k}\} = \top$$

Pour fixer (autant que faire se peut) les idées, on représente cette union d'ensembles de nombres "congrus à 0 ou à n selon un nombre premier p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$" qui contient TOUS les nombres de 3 à $n/2$ par un ensemble de patatoïdes comme sur le dessin suivant ;



Chaque ensemble délimité contient un ensemble de nombres compris entre 3 et $n/2$ et congrus à 0 ou bien congrus à n selon un nombre premier p_k (p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$). On a coloré l'un d'eux en fuschia et à l'intérieur de lui on a "isolé" en utilisant la couleur rose clair les nombres qui sont congrus à n parmi ceux qui sont congrus à 0 ou à n modulo p_k.

Etudions le cas d'un nombre pair n qui est le double d'un nombre composé et concentrons-nous sur le produit, noté P de tous les nombres premiers qui sont compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$.

Alors on a que chacun des p_m composant le produit P ne peut pas être un élément des parties des ensembles contenant les nombres "congrus à 0" selon un p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$ puisque c'est un nombre premier. Chaque nombre premier p_m composant le produit P est donc forcément dans les parties des ensembles contenant les nombres "congrus à n selon un p_k" (partie rose clair et non fuschia pour la fixation d'idées).

Mais alors le produit P est congru à une puissance de n, puisque chacun de ses termes est congru à n, P est congru à la puissance n^x avec x le nombre de nombres premiers compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$.

Or on a supposé que n est le double d'un nombre composé. Il a donc un diviseur d inférieur à sa racine. Ce diviseur d divise la puissance n^x puisqu'il divise n, c'est à dire que n^x est congru à 0 modulo d ce diviseur ; mais d ne divise pas P puisque tous les nombres composant le produit P sont des nombres premiers. On a abouti à une contradiction (congruence à 0 ou non congruence à 0 modulo d un diviseur de n). Tous les nombres compris entre 3 et $n/2$ ne peuvent pas être couverts par l'union ensembliste des congrus à 0 ou congrus à n modulo chaque p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Le complémentaire du vide n'est pas plein. L'ensemble initial n'est pas vide. Il contient un décomposant de Goldbach au moins à l'issue de cette démonstration par l'absurde. Et n vérifie ainsi la conjecture.