Conjecture de Goldbach et recherche d'un sous-graphe d'ordre maximal dans un graphe à arêtes colorées

Denise Vella

Juin 2006

1 Introduction

Dans une lettre à Euler du 7 juin 1742, Goldbach énonce *"il semble que tout nombre supérieur à* 2 *soit la somme de trois nombres premiers"*. Euler reformule cette conjecture en une forme équivalente qui est *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Etude d'exemples

2.1 x=14

Pour trouver une décomposition Goldbach de 28 = 2.14, on peut apparier l'un des 5 nombres premiers inférieurs à 14, (3, 5, 7, 11 ou 13) à son complémentaire à 28 (25, 23, 21, 17 ou 15) lorsque celui-ci est premier. Seuls 17 et 23 sont premiers, ce qui fournit 2 décompositions Goldbach de 28.

On peut représenter les propriétés de divisibilité qui lient ces différents nombres sur le graphe biparti suivant, composé à gauche des nombres premiers p_i inférieurs à x et à droite des $2x - p_i$ correspondant.

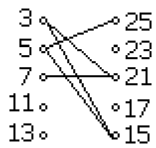

Figure 1 : x=14

Quand un nombre premier divise deux nombres, il divise également l'écart qui les sépare. Sur notre exemple, 3 divise 15 et 21 "parce qu"' il divise l'écart qui sépare 15 de 21, en l'occurrence 6. Or, cet écart est également celui qui sépare les complémentaires à $2x$ de 15 et 21 qui sont 7 et 13.

Intéressons-nous alors au graphe complet dont les sommets sont les nombres premiers inférieurs à x. Associons une couleur à chaque nombre premier. On colorie dans le graphe complet un arc entre deux nombres x et y de la couleur d'un nombre premier impair p si p divise l'écart entre x et y ; la couleur rouge (resp. jaune) correspond à la divisibilité par 3 (resp. 5).

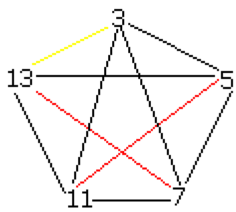

Fig. 2 : divisibilité des écarts entre premiers

Les arêtes de divisibilité entre les p_i et les $2x - p_i$ qu'on avait représenté dans la figure 1 se retrouvent dans le graphe de la figure 2. On va épaissir les arêtes du graphe de la figure 2 correspondant aux arcs du graphe de la figure 1. Par exemple, épaissir l'arête jaune entre 3 et 13 représente le fait que 5 divise à la fois le complémentaire de 3 et le complémentaire de 13. Enfin, on supprime du graphe complet les arêtes correspondant aux écarts qui sont des puissances de 2 car ils ne nous intéressent pas.

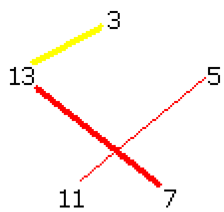

Fig. 3 : arcs étudiés si x = 14

Les sommets 5 et 11 ne sont pas "touchés" par des arêtes épaissies. Ils permettent chacun de trouver une décomposition Goldbach de 28.

Le fait de trouver une décomposition Goldbach de x semble donc lié au fait de trouver un sous-graphe du graphe de divisibilité des écarts, respectant certaines contraintes, et qui soit recouvrant[1] ou pas.

2.2 Deux autres exemples

Représentons d'abord ci-dessous les graphes de divisibilité pour les cas $x = 21$ et $x = 28$.

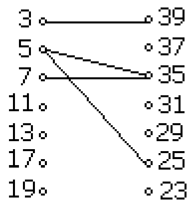

Fig. 4 : x=21

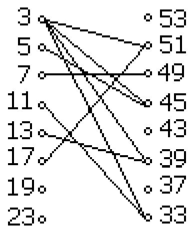

Fig. 4 bis : x=28

Représentons ci-après les sous-graphes des graphes complets de divisibilité des écarts entre premiers pour les cas $x = 21$ et $x = 28$, dans lesquels on a épaissi les arêtes obligatoirement utilisables du fait de la valeur de x.

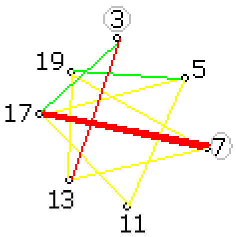

Fig. 5 : x=21

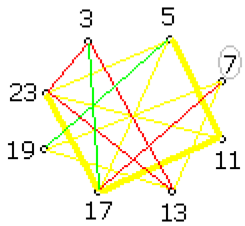

Fig. 5 bis : x=28

On a entouré en gris les sommets associés aux nombres premiers impairs qui divisent x. Les sommets qui ne sont ni entourés, ni extrémités d'arêtes épaissis permettent de trouver des décompositions Goldbach de 42 ($42 = 5 + 37 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$) et de 56 ($56 = 3 + 53 = 13 + 43 = 19 + 37$).

[1]Un sous-graphe d'un graphe est recouvrant s'il en contient tous les sommets.

3 Matrice de divisibilité des écarts

La représentation par des graphes est très vite illisible. On utilisera donc plutôt une représentation par matrice ; dans celle ci-dessous, p nombre premier impair se trouve dans la case (i, j), j étant supérieur strictement à i si $p|j - i$:

	3	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**
3	X							
5		X						
7			X					
11		3 *		X				
13	5		3		X			
17	7	3	5 **	3 *		X		
19		7	3		3		X	
23	5	3		3	5	3 *		X

Le fait de fixer x, à la recherche des décompositions Goldbach de $2x$ consiste à "être contraint" d'utiliser certaines cases de la matrice.

La case marquée de deux étoiles correspond à l'arête à épaissir dans le graphe 5. Les trois cases marquées d'une étoile correspondent aux arêtes à épaissir dans le graphe 5 bis.

4 Les arêtes de transitivité

Etudions à nouveau le graphe de la figure 5 bis correspondant au cas $x = 28$. On appellera "arête de transitivité" une arête d'une certaine couleur reliant deux sommets x et z et tel qu'il existe un sommet y relié à x et à z par deux arêtes de la même couleur que l'arête reliant x à z. Ces arêtes sont "redondantes" avec les arêtes non transitives. On éliminera ainsi du graphe les arêtes $(3, 23)$ (redondante avec $(3, 13)$ et $(13, 23)$), $(5, 17)$ (redondante avec $(5, 11)$ et $(11, 17)$), $(5, 23)$ (redondante avec $(5, 17)$ et $(17, 23)$), , $(11, 23)$ (redondante avec $(11, 17)$ et $(17, 23)$), , $(7, 19)$ (redondante avec $(7, 13)$ et $(13, 19)$). Eliminons les arêtes redondantes du graphe de la figure 5 bis. On obtient le graphe beaucoup plus lisible suivant :

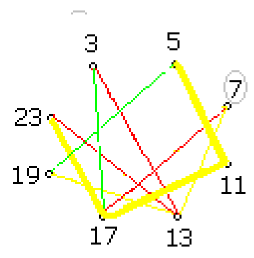

Fig. 5 bis : x=28

5 Les croisements

Certains croisements ont pour conséquence des impossibilités d'épaissir simultanément certaines arêtes.

Revenons à notre cas initial. 3 divise l'écart entre 5 et 11 mais 3 divise également l'écart entre 7 et 13. Cependant, on n'aura pas le droit d'utiliser simultanément ces deux arêtes lors de la recherche d'un sous-graphe d'ordre maximal. Ce sont des arêtes mutuellement exclusives : si 3 divise le correspondant de 5 alors il divise le correspondant de 11 et réciproquement. Si 3 divise le correspondant de 7, alors il divise le correspondant de 13 et réciproquement. Mais une chose est sûre, 3 ne peut diviser simultanément le correspondant de 3 et le correspondant de 5 puisque 3 et 5 sont séparés seulement d'un écart de 2.

Dans le graphe 5 bis initial, par contre, il y avait un croisement entre les arêtes rouges (5, 17) et (11, 23) ; ces arêtes pourraient cependant être épaissies simultanément sans qu'il y ait de contradiction car il s'agit d'arêtes de transitivité.

Il est à noter que cette notion de croisement est liée ici au fait que l'on a implicitement disposé les sommets sur un cercle et considéré que les arêtes devaient passer à l'intérieur du cercle. On pourrait éviter les "croisements" en dessinant les arêtes à l'extérieur du cercle, permettant ainsi au graphe d'être "planaire" (terme employé dans la littérature). La contrainte de planarité est à appliquer ici à des arêtes monochromes. Il faudra étudier précisément ces croisements pour savoir si on n'a jamais le droit de les utiliser dans le cas où il ne s'agit pas d'arcs de transitivité dans la recherche d'un sous-graphe multicolore recouvrant et planaire mono-chromatiquement.

6 Sommets n'appartenant pas à un sous-graphe d'ordre maximal

Dans les quatre cas qui ont été étudiés, les sommets qui ne divisaient pas x et qui n'appartenaient pas au sous-graphe d'ordre maximal permettaient d'obtenir des décompositions Goldbach. Est-ce toujours le cas ? Prouver la conjecture de Goldbach est il équivalent à prouver qu'un sous-graphe d'ordre maximal n'est jamais recouvrant ? Les résultats déjà connus en théorie des graphes sur la recherche de sous-graphes respectant certaines contraintes nous permettraient-ils de conclure quant à la prouvabilité de la conjecture de Goldbach ?

7 Conclusion

Il semblerait qu'il y ait autant de décompositions Goldbach de $2x$ que de sommets non diviseurs premiers impairs de x et n'appartenant pas à un sous-graphe d'ordre maximal du graphe des nombres premiers inférieurs à x. Quand pourra-t-on enfin utiliser la formulation *"tout entier naturel supérieur à 2 est le milieu de deux nombres premiers"* ?...

References

[1] O. Cogis, C. Robert. *Au-delà des ponts de Königsberg, Théorie des graphes. Problèmes, théorèmes, algorithmes.* Éd. Vuibert, 2003.

[2] P. Damphousse. *L'arithmétique ou l'art de compter.* Éd. Le Pommmier, 2002.

[3] A. Doxiadis. *Oncle Pétros et la conjecture de Goldbach.* Éd. Points Seuil 2003.

[4] L. Euler. *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Éd. Commentationes arithmeticae 2, p.639, 1849.

[5] P. Hoffman. *Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres.* Éd. Belin, 2000.

[6] C.A. Laisant. *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach.* Éd. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.

[7] G. Tenenbaum, M. Mendès France. *Les nombres premiers.* Éd. Que sais-je ?, n°571, 1997.