Sommes de diviseurs ou bien produits de restes (DV, 26/7/2015)

1) Matrice de diviseurs

On est aussi émerveillé qu'Euler, lorsqu'il fournit dans l'article *"Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs"*, une récurrence qui fournit la somme des diviseurs d'un nombre.

Mais on l'est encore plus lorsqu'on découvre que cette somme de diviseurs se calcule tout simplement par multiplication matricielle de la façon suivante : appelons M_n la matrice carrée d'entiers de taille $n \times n$ qui contient les éléments $M_{n,d}$ valant d si $d \mid n$ et 0 sinon. Pour fixer les idées, fournissons M_{10}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Ici, $\sigma(10) = 18$ est la somme des éléments de la dernière ligne.

On multiplie à gauche M_{10} par une matrice diagonale de 1 "inversée" (par convention[1], une matrice diagonale, par exemple la matrice *Identité*, a ses nombres sur la diagonale nord-ouest / sud-est).

$$Inv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice suivante $Inv.M_{10}$, qui contient les sommes des diviseurs des nombres de 1 à 10 dans sa dernière colonne, de bas en haut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 18 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 15 & 15 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 6 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions à droite le résultat du produit par une matrice d'extraction *DerCol* de la dernière colonne.

[1]qui correspond à notre lecture/écriture de gauche à droite puis de haut en bas.

$$DerCol = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice produit $Inv.M_{10}.DerCol$ qui contient, ligne par ligne, les sommes des diviseurs des nombres de 1 à n. C'est de toute beauté !

$$\begin{pmatrix} 18&18&18&18&18&18&18&18&18&18\\ 13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 8&8&8&8&8&8&8&8&8&8\\ 12&12&12&12&12&12&12&12&12&12\\ 6&6&6&6&6&6&6&6&6&6\\ 7&7&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 4&4&4&4&4&4&4&4&4&4\\ 3&3&3&3&3&3&3&3&3&3\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Les sommes de diviseurs des nombres se trouvant également positionnées sur la diagonale de la matrice, un nombre premier p présentant cette particularité d'avoir sa somme de diviseurs qui vaut $p+1$, les nombres premiers sont "presque" (à 1 près !) les valeurs propres de l'opérateur proposé (moyennant un "petit" retournement nord-ouest/sud-est[2]) .

2) *Les sommes de cosinus*

On a proposé la fonction $sumsumcos(n)$ dont il semblerait que les zéros sont les nombres premiers.

$$sumsumcos(n) = \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$$

Cette formule a été dérivée d'une formule pour la somme des diviseurs d'un entier

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^k \cos\left(\frac{2n\pi\lfloor x+1\rfloor}{k}\right) \mathrm{d}x$$

proposée en exercice (n°58, page 86) dans le livre de J-M. de Koninck et A. Mercier *Introduction à la théorie des nombres*, Modulo Éditeur, 1994. On ne sait pas faire cet exercice, on n'a pas vérifié cette référence.

On utilise la fonction d'Euler $cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ pour réécrire cette formule en :

$$sumsumcos(n) = \frac{1}{2} \sum_{b=2}^{n-1} \sum_{o=1}^{b} (e^{i\frac{2\pi no}{b}} + e^{-i\frac{2\pi no}{b}})$$

Mais on n'a pas la possibilité de pousser plus avant dans cette direction-là : les éléments de la matrice sont des réels et on manque de compétence en analyse et en théorie spectrale. Cependant, on trouve, dans plusieurs références bibliographiques, des éléments qui permettraient peut-être d'avancer sur ce chemin-là [3].

[2]Bretagne/Provence !

[3]Cf [1] M. Berger and P. Gauduchon and E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, p.146-147, Springer, 1971 ou bien [2] Y. De Cornulier, *Introduction au spectre du Laplacien sur une variété Riemannienne*, Exposé à l'Ecole Normale Supérieure, 2003, ou encore [3] K. R. Davidson, *C*-Algbras by example (chapitre 6)*, Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, 1996, ou enfin [4] H. Tal-Ezer and R. Kosloff, *Accurate and efficient scheme for propagating the time-dependent Schrödinger equation*, p.3967, J. Chem. Physics 81, 1984.

La fonction somme de cosinus proposée ci-dessus trouve les nombres premiers sur l'axe des abscisses ; c'est en quelque sorte une approche par la dimension 1, par la ligne. A propos de la conjecture de Goldbach, on a bien avancé en février 2014 lorsqu'on a "tout écrasé", i.e. lorsqu'on a représenté chaque nombre entier par un booléen qui ne conservait de toute l'information contenue dans ce nombre que son caractère de primalité (0 pour premier, 1 pour composé), oubliant ainsi toutes les autres informations qui nous semblaient pertinentes jusque-là, comme les différents restes modulaires du nombre dans les différents corps premiers.

Ici, on voudrait expérimenter un cheminement inverse : passer de la dimension 1 de l'axe des abscisses, sur lequel se trouvent les nombres premiers comme zéros d'une somme de cosinus, à la dimension juste supérieure 2, en codant les informations dont on dispose dans des matrices, passant ainsi de la séquence de nombres au tableau de nombres.

On peut par exemple définir une matrice qui contient ligne par ligne les cosinus à additionner, y compris pour les deux indices exclus pour le calcul des zéros qui correspondent aux bornes $b = 1$ et $b = n$. Cette matrice M est triangulaire (haute-gauche) et contient à la position b, o l'élément $a_{b,o} = cos\left(\frac{2\pi no}{b}\right)$. En multipliant cette matrice par la matrice triangulaire haute-gauche pleine de 1, on obtient sur la diagonale les différentes sommes de cosinus à additionner et dont il faut tester l'égalité à $1 + n$ pour savoir si n est un nombre premier (on pourrait par un artifice rajouter ce $1+n$ à l'une des extrémités de la diagonale par exemple). La somme des éléments diagonaux qu'il faudrait tester est la trace de la matrice. On voudrait aussi simplifier au maximum la formulation du problème, en éliminant l'appel à la fonction cosinus, en utilisant des nombres entiers.

3) Matrice de restes modulaires, produit de restes

On voudrait plutôt trouver une manière d'utiliser la matrice des restes modulaires ci-dessous ($M_{i,j} = i \; mod \; j$, i variant de 1 à n et j variant de 2 à $n-1$).

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\
1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\
0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4\\
1 & 2 & 1 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\\
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6\\
1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 7 & 7\\
0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 & 8\\
1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 9
\end{pmatrix}$$

Un nombre composé est caractérisé par le fait qu'il a au moins un reste nul dans l'une de ses divisions par un nombre supérieur ou égal à 2 et qui lui est strictement inférieur, tandis qu'un nombre premier n'a aucun tel reste nul.

On définit la fonction f suivante :

$$f(x) = x \prod_{2 \leqslant p < x} x \; mod \; p$$

Exemples :

$$f(9) = 9 \prod_{2 \leqslant p < 9} 9 \; mod \; p = 9 \times (1 \times 0 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 0$$
$$f(13) = 13 \prod_{2 \leqslant p < 13} 13 \; mod \; p = 13 \times (1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 13 \times 63 = 819$$
$$f(15) = 15 \prod_{2 \leqslant p < 15} 15 \; mod \; p = 15 \times (1 \times 0 \times 3 \times 0 \times 3 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 0$$
$$f(25) = 25 \prod_{2 \leqslant p < 25} 25 \; mod \; p = 25 \times (1 \times 1 \times 1 \times 0 \ldots) = 0$$

La fonction f associe 0 à tout nombre composé et λp à tout nombre premier p.

Cela ne semble pas présenter trop d'intérêt d'en passer par un produit de restes : c'est lourd, ça oblige à utiliser le produit de Hadamard (obtention des éléments de la matrice-produit par multiplication terme à terme des éléments de 2 matrices de même taille) ; il suffirait d'être capable de tester la non-nullité de certains éléments ciblés d'une ligne de la matrice, de l'élément de la première colonne à celui juste avant la deuxième diagonale descendante.

La "fabrication" de la matrice des restes modulaires nécessite d'être capable d'engendrer des séquences cycliques de restes. Voyons seulement sur un exemple comment se constitue une telle séquence cyclique : on veut obtenir par un produit matriciel le vecteur (ligne par exemple)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On l'obtient par le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

On n'arrive pas à obtenir quoi que ce soit de ce produit de restes, mas si on y arrivait, cela permettrait peut-être d'établir une dualité intéressante entre la somme des diviseurs et le produit des restes.

4) Matrice de rationnels

La matrice de cosinus proposée en 2) applique la fonction cosinus à des angles réels. Obtiendrait-on des résultats intéressants en se concentrant sur les rationnels qui interviennent dans les arguments de la fonction cosinus en étudiant plutôt la matrice suivante ?

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 3/6 & 4/6 & 5/6 & 6/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 & 4/7 & 5/7 & 6/7 & 7/7 & 0 & 0 \\ 1/8 & 2/8 & 3/8 & 4/8 & 5/8 & 6/8 & 7/8 & 8/8 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 4/9 & 5/9 & 6/9 & 7/9 & 8/9 & 9/9 \end{pmatrix}$$

5) voir avec les carrés des rationnels ainsi que $\sqrt{\dfrac{\lambda}{4\pi^2}}$