*Note Julyrev (Denise Vella-Chemla, 21.7.18)*

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre pair $n > 2$ est la somme de deux nombres premiers.

On note $\mathcal{P} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers impairs et $\overline{\mathcal{P}} = \{9, 15, 21, 25, 27, \ldots\}$ l'ensemble des nombres composés impairs $> 1$.

Soit $n \geq 6$ un entier pair. On appelle *décomposition de* $n$ un couple $(p, q)$ d'entiers impairs $> 1$ tels que $n = p + q$, $p$ est un nombre premier et $p \leq q$. Une telle décomposition est dite *décomposition de Goldbach* si $q$ est également premier. Le nombre de décompositions de Goldbach de $n$ est noté :

$$X_{pp}(n) = \text{Card}\left(\{(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : p + q = n,\ p \leq n/2\}\right)$$

On s'intéresse ici à la manière dont ce nombre évolue lorsqu'on passe de $n$ à $n + 2$. On note $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ les décompositions de $n = p + q$ qui ne sont pas des décompositions de Goldbach de $n$ ($q$ est composé) mais qui "deviennent" des décompositions de Goldbach de $n + 2$ ($q + 2$ est premier) et $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ les décompositions de Goldbach de $n = p + q$ ($q$ est premier) qui "se perdent" pour $n + 2$ ($q + 2$ est composé).

$$X_{p\overline{p}\to pp}(n) = \text{Card}\left(\{(p, q) \in \mathcal{P} \times \overline{\mathcal{P}} : p + q = n,\ p \leq n/2,\ n + 2 - p \in \mathcal{P}\}\right)$$
$$X_{pp\to p\overline{p}}(n) = \text{Card}\left(\{(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : p + q = n,\ p \leq n/2,\ n + 2 - p \in \overline{\mathcal{P}}\}\right)$$

On a la relation de récurrence suivante pour $X_{pp}(n)$ :

$$X_{pp}(n + 2) = X_{pp}(n) + X_{p\overline{p}\to pp}(n) - X_{pp\to p\overline{p}}(n) + premier(\tfrac{n+2}{2})$$

On veut avoir l'assurance que $X_{pp}(n)$ est toujours strictement positif puisque $X_{pp}(n)$ compte les décompositions de Goldbach de $n$ *.

L'ajout du booléen $premier(\frac{n+2}{2})$ assure la positivité stricte de $X_{pp}(n)$ pour tout $n = 2p$ double de $p$ nombre premier, qui vérifie trivialement la conjecture de Goldbach.

Hormis ces cas triviaux de vérification de la conjecture, on souhaite démontrer que $X_{pp}(n)$ est toujours supérieur à $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$, le nombre qui lui est retranché dans la relation de récurrence.

On sait que $X_{pp}(n)$ est strictement positif jusqu'à $4.10^{18}$ (par calcul par ordinateur d'Oliveira e Silva en 2014).

$X_{pp\to p\overline{p}}(n)$, le nombre à retrancher à $X_{pp}(n)$, est maximum lorsque $n$ est de la forme $6k + 2$. C'est un fait que l'on découvre par programme et que l'on peut expliquer.

Les tableaux de valeurs fournis en annexe montrent que pour tout $n$ de la forme $6k + 2$, on a

$$X_{pp}(n) = X_{pp\to p\overline{p}}(n) + \epsilon(n).$$

avec $\epsilon(n)$ qui prend soit la valeur 1 (lorsque 3 est un décomposant de $n$, 1 étant composé, la décomposition $3 + (n - 3)$ n'est pas comptabilisée par $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$) soit la valeur 0.

Il faut d'abord avoir à l'esprit que si l'on considère les 5 nombres premiers $3, 5, 7, 11$ et 19, ces 5 nombres ne peuvent jamais être simultanément décomposants de Goldbach d'un nombre pair $n$ car ils couvrent à eux cinq tous les restes possibles modulo 5 (ils ont $3, 0, 2, 1$ et 4 pour reste dans une division par 5). En effet, on sait par l'étude des congruences † que $x$ est un décomposant de Goldbach de $n$ si et seulement si $x \not\equiv n\ (mod\ p)$ pour tout nombre premier $p$ inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. Si les 5 nombres premiers ci-dessus étaient simultanément décomposants de Goldbach de $n$, $n$ n'aurait aucun reste modulaire possible selon le module 5. On voit en étudiant les définitions de $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ et $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ que parmi les nombres premiers inférieurs à $n/2$ (et notamment parmi les 5 nombres premiers ci-dessus, choisis du fait de leur couverture totale des restes modulaires dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, ou plus généralement dans la mesure où tous les nombres premiers inférieurs à $n$ ne peuvent être simultanément décomposants de Goldbach de $n$), certains sont comptabilisés

∗. On note qu'il est inutile de comptabiliser les nombres de décompositions qui ne sont ni décompositions de Goldbach de $n$, ni décompositions de Goldbach de $n + 2$ (auxquelles aurait été associée la variable $X_{p\overline{p}\to p\overline{p}}(n)$) ou encore les nombres de décompositions qui sont à la fois des décompositions de Goldbach de $n$ et de $n + 2$ (auxquelles aurait été associée la variable $X_{pp\to pp}(n)$) car ces nombres de décompositions ne font pas varier $X_{pp}(n)$ lors du passage de $n$ à $n + 2$.

†. voir par exemple une note écrite en octobre 2007, *Changer l'ordre sur les entiers pour comprendre le partage des décomposants de Goldbach* téléchargeable sur le site http://denisevellachemla.eu/reordonner.pdf.

par $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ et ceux qui ne sont pas petits sommants d'une décomposition de Goldbach de $n$ doivent également être comptabilisés, on se dit qu'ils le sont par la variable $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ (ils ne disparaissent pas dans la nature). Cet argument semble assurer la positivité stricte de $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ même si c'est un argument bizarre car on pense "tous les non-décomposants de Goldbach de $n$ pourraient rester des non-décomposants de Goldbach de $n+2$" mais comme on a fait ce choix de ne pas comptabiliser les non-décomposants de Goldbach et qui le restent, dans la mesure où ils ne font pas varier $X_{pp}(n)$, il semblerait que la nécessité d'avoir les deux sortes de décompositions pour $n$ ait pour conséquence qu'un non-décomposant de Goldbach au moins de $n$ devient un décomposant de Goldbach de $n+2$. On n'est pas bien convaincue, on dirait que ça ne va pas.

Voyons pourquoi, dans le cas où $n$ est de la forme $6k+2$, $X_{pp\to p\overline{p}}(n) = X_{pp}(n) - \epsilon(n)$ : dans un tel cas, les nombres premiers de la forme $6k'-1$ ne peuvent être décomposants de Goldbach de $n$ car alors $n-x = (6k+2)-(6k'-1) = 6(k-k')+3$ est divisible par 3. Les nombres premiers $x$ qui peuvent être des décomposants de Goldbach de $n$ sont alors de la forme $6k'+1$ ; ce fait a pour conséquence que $n+2-x = (6k+4)-(6k'+1) = 6(k-k')+3$ est divisible par 3 et est donc comptabilisé par $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$. On a $X_{pp}(n) = X_{pp\to p\overline{p}}(n) + \epsilon(n)$, ce qui pourrait entraîner l'annulation de $X_{pp}(n)$ mais l'addition de $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ dont on a expliqué au paragraphe précédent la nécessaire positivité stricte permet d'éviter une telle annulation.

Les cas correspondant aux nombres $n$ de la forme $6k+2$ sont ceux pour lesquels tous les décomposants de Goldbach de $n$ ne pouvant être des décomposants de Goldbach de $n+2$, l'intégralité de leur nombre doit être soustrait de $X_{pp}(n)$. Comme on a alors$X_{pp}(n+2) = X_{pp}(n) - X_{pp}(n) + X_{p\overline{p}\to pp}(n)$, c'est alors seulement l'argument de la positivité stricte de $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ qui permet d'éviter l'annulation pour $X_{pp}(n+2)$.

Dans les cas où $n$ est de la forme $6k$ ou $6k+4$, on voit que $X_{pp}(n)$ est toujours supérieur strictement à $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$, ce qui garantit sa positivité stricte lorsqu'on lui soustrait $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$. Pourquoi cela a-t-il lieu ? Par sa définition, $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ est le cardinal d'un sous-ensemble de l'ensemble qui a pour cardinal $X_{pp}(n)$ ($X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ compte en effet les décompositions de Goldbach de $n = x+(n-x)$ telles que $n+2-x$ n'est pas premier) ; si $X_{pp}(n)$ était égal à $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$, on aurait alors, du fait de cette définition de $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$, pour toute décomposition de Goldbach de $n$, à la fois $n-x$ premier et $n+2-x$ premier, entraînant que $x+(n+2-x)$ serait une décomposition de Goldbach de $n+2$ (c'est-à-dire que tous les décomposants de Goldbach de $n$ se transfèreraient à $n+2$). Mais toutes ces incongruences ne sauraient advenir simultanément, et entre $x$ et $n$, et entre $x$ et $n+2$ (et pourquoi pas ?). Cela a pour conséquence que pour les $n$ des formes $6k$ et $6k+4$, $X_{pp\to p\overline{p}}(n) < X_{pp}(n)$ et entraîne, par héritage de $n$ à $n+2$, que $X_{pp}(n)$ est strictement positif pour tout $n \geqslant 6$.

*Annexe : exemples de décompositions et valeurs des variables*

| $n$ | | | | | | | | | | $X_{pp}(n)$ | $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ | $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ | $2p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $3+3$ | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | |
| 8 | $3+5$ | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | $3+7$ | $5+5$ | | | | | | | | 2 | 0 | 1 | |
| 12 | | $5+7$ | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | $3+11$ | | $7+7$ | | | | | | | 2 | 1 | 1 | |
| 16 | $3+13$ | $5+11$ | | | | | | | | 2 | 1 | 1 | |
| 18 | | $5+13$ | $7+11$ | | | | | | | 2 | 1 | 1 | |
| 20 | $3+17$ | | $7+13$ | | | | | | | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 22 | $3+19$ | $5+17$ | | $11+11$ | | | | | | 3 | 1 | 1 | |
| 24 | | $5+19$ | $7+17$ | $11+13$ | | | | | | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 26 | $3+23$ | | $7+19$ | | $13+13$ | | | | | 3 | 2 | 3 | |
| 28 | | $5+23$ | | $11+17$ | | | | | | 2 | 2 | 1 | |
| 30 | | | $7+23$ | $11+19$ | $13+17$ | | | | | 3 | 1 | 2 | |
| 32 | $3+29$ | | | | $13+19$ | | | | | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 34 | $3+31$ | $5+29$ | | $11+23$ | | $17+17$ | | | | 4 | 2 | 2 | |
| 36 | | $5+31$ | $7+29$ | | $13+23$ | $17+19$ | | | | 4 | 0 | 3 | 1 |
| 38 | | | $7+31$ | | | | $19+19$ | | | 2 | 3 | 2 | |
| 40 | $3+37$ | | | $11+29$ | | $17+23$ | | | | 3 | 3 | 2 | |
| 42 | | $5+37$ | | $11+31$ | $13+29$ | | $19+23$ | | | 4 | 2 | 3 | |
| 44 | $3+41$ | | $7+37$ | | $13+31$ | | | | | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 46 | $3+43$ | $5+41$ | | | | $17+29$ | | $23+23$ | | 4 | 3 | 2 | |
| 48 | | $5+43$ | $7+41$ | $11+37$ | | $17+31$ | $19+29$ | | | 5 | 2 | 3 | |
| 50 | $3+47$ | | $7+43$ | | $13+37$ | | $19+31$ | | | 4 | 3 | 4 | |
| 52 | | $5+47$ | | $11+41$ | | | | $23+29$ | | 3 | 3 | 1 | |
| 54 | | | $7+47$ | $11+43$ | $13+41$ | $17+37$ | | $23+31$ | | 5 | 2 | 4 | |
| 56 | $3+53$ | | | | $13+43$ | | $19+37$ | | | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 58 | | $5+53$ | | $11+47$ | | $17+41$ | | | $29+29$ | 4 | 4 | 2 | |
| 60 | | | $7+53$ | | $13+47$ | $17+43$ | $19+41$ | $23+37$ | $29+31$ | 6 | 1 | 5 | 1 |

| $n$ | $X_{pp}(n)$ | $X_{p\overline{p}\to pp}(n)$ | $X_{pp\to p\overline{p}}(n)$ | $2p$ |
|---|---|---|---|---|
| 99932 | 745 | 630 | 745 | |
| 99934 | 630 | 1107 | 508 | |
| 99936 | 1229 | 467 | 1109 | |
| 99938 | 587 | 859 | 587 | |
| 99940 | 859 | 1015 | 675 | |
| 99942 | 1199 | 541 | 1064 | |
| 99944 | 676 | 835 | 676 | |
| 99946 | 835 | 1010 | 665 | |
| 99948 | 1180 | 630 | 1000 | |
| 99950 | 810 | 613 | 810 | |
| 99952 | 613 | 1089 | 508 | |
| 99954 | 1194 | 494 | 1083 | |
| 99956 | 605 | 660 | 605 | |
| 99958 | 660 | 1802 | 399 | |
| 99960 | 2063 | 374 | 1819 | |
| 99962 | 618 | 606 | 618 | |
| 99964 | 606 | 1113 | 497 | |
| 99966 | 1222 | 565 | 1079 | |
| 99968 | 708 | 900 | 708 | |
| 99970 | 900 | 1009 | 719 | |
| 99972 | 1190 | 587 | 1041 | |
| 99974 | 736 | 601 | 736 | |
| 99976 | 601 | 1140 | 477 | |
| 99978 | 1264 | 620 | 1083 | |
| 99980 | 801 | 607 | 801 | 1 |
| 99982 | 608 | 1092 | 484 | |
| 99984 | 1216 | 475 | 1089 | 1 |
| 99986 | 603 | 736 | 603 | |
| 99988 | 736 | 1596 | 477 | |
| 99990 | 1855 | 425 | 1642 | |
| 99992 | 638 | 650 | 637 | |
| 99994 | 651 | 1163 | 511 | |
| 99996 | 1303 | 478 | 1177 | 1 |
| 99998 | 605 | 810 | 605 | |
| 100000 | 810 | 1213 | 600 | |