Le maillage permet la visualisation des règles de réécriture
(Denise Vella-Chemla - 7/2/14)

En octobre 2005, on avait trouvé un maillage qui semblait intéressant pour visualiser les décompositions de Goldbach.

Puis on l'avait abandonné sous prétexte qu'il ne rendait pas visibles les classes de congruences d'appartenance des entiers dans les différents corps premiers.

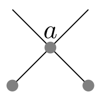
Il s'avère que ce maillage fournit la visualisation des règles de réécriture sur les mots d'un langage à 4 lettres qu'on vient tout juste de découvrir.

On rappelle :

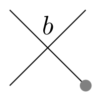
- que la lettre a est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre b est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre c est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé et $p \leqslant n/2$;
- que la lettre d est utilisée pour symboliser une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés et $p \leqslant n/2$;

Les quatre lettres sont représentées par les petits symboles suivants :

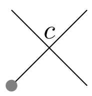
lettre a :



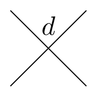
lettre b :



lettre c :

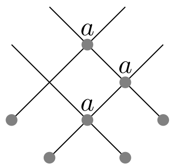


lettre d :

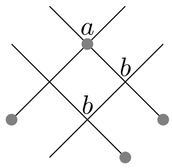


Les 16 règles de réécriture sont alors aisées à retrouver :

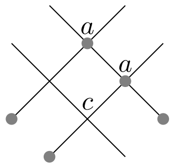
1) règle $aa \to a$:



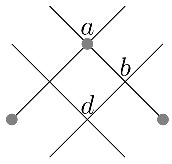
2) règle $ab \to b$:



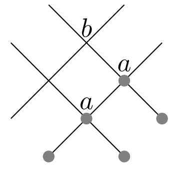
3) règle $ac \to a$:



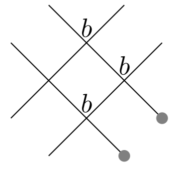
4) règle $ad \to b$:



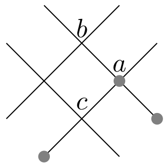
5) règle $ba \to a$:



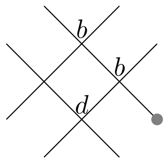
6) règle $bb \to b$:



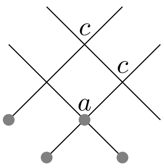
7) règle $bc \to a$:



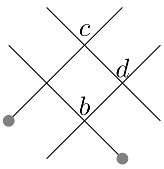
8) règle $bd \to b$:



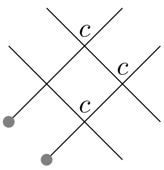
9) règle $ca \to c$:



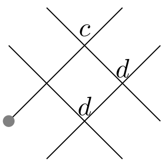
10) règle $cb \to d$:



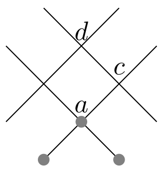
11) règle $cc \to c$:



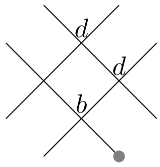
12) règle $cd \to d$:



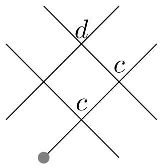
13) règle $da \to c$:



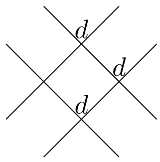
14) règle $db \rightarrow d$:



15) règle $dc \rightarrow c$:



16) règle $dd \rightarrow d$:



On peut ainsi "lire verticalement" les mots sur notre alphabet de 4 lettres associés aux nombres pairs successifs (les décompositions de Goldbach sont indiquées par les lettres a rouges).

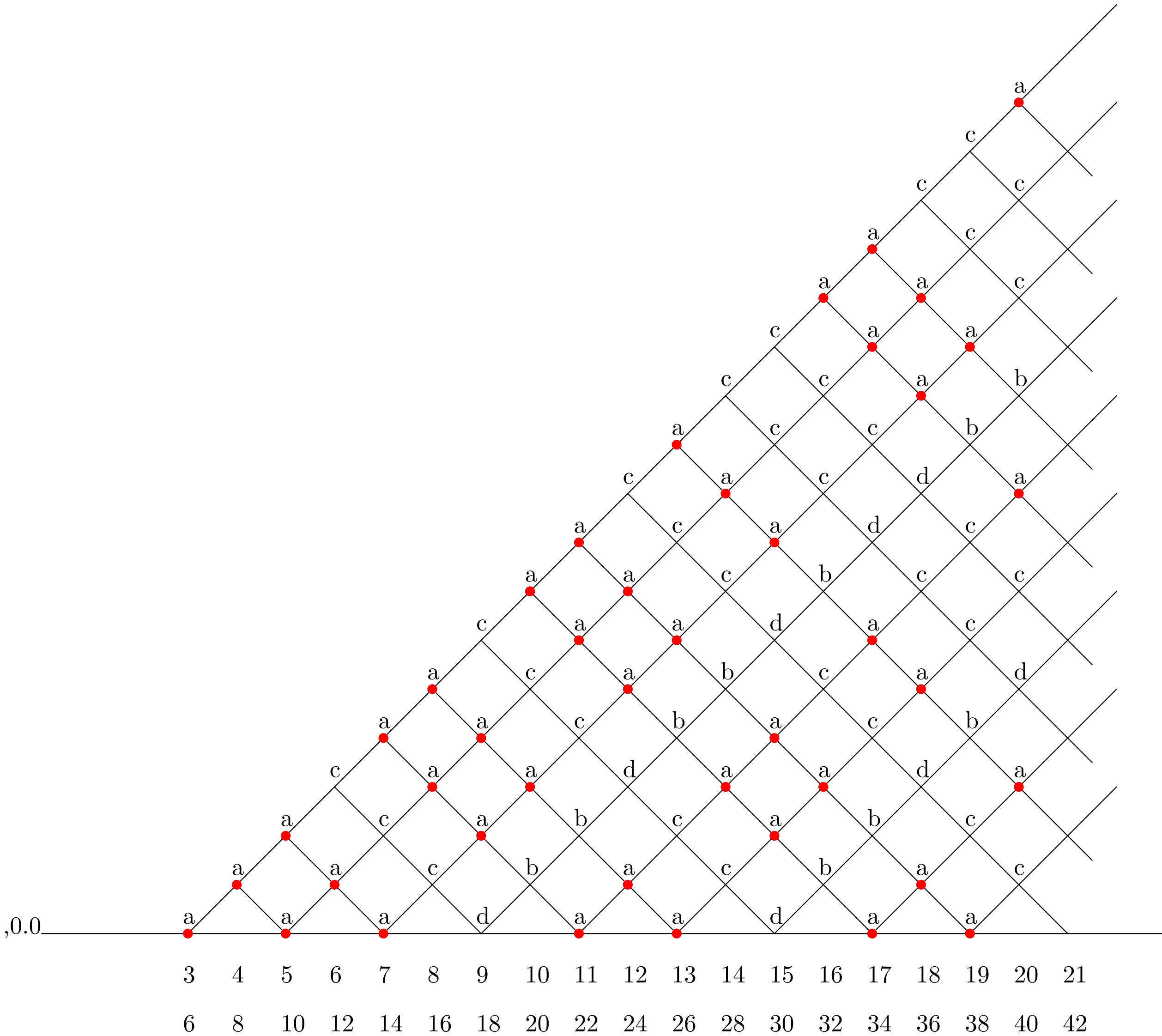
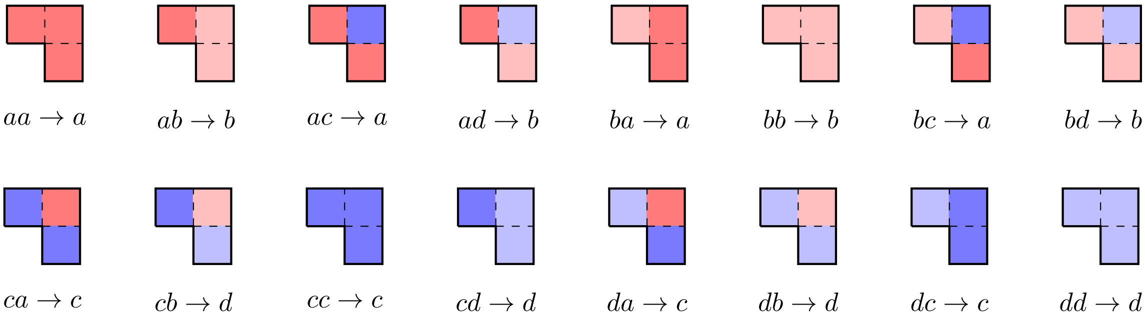


FIGURE 1 – Le treillis Goldbach

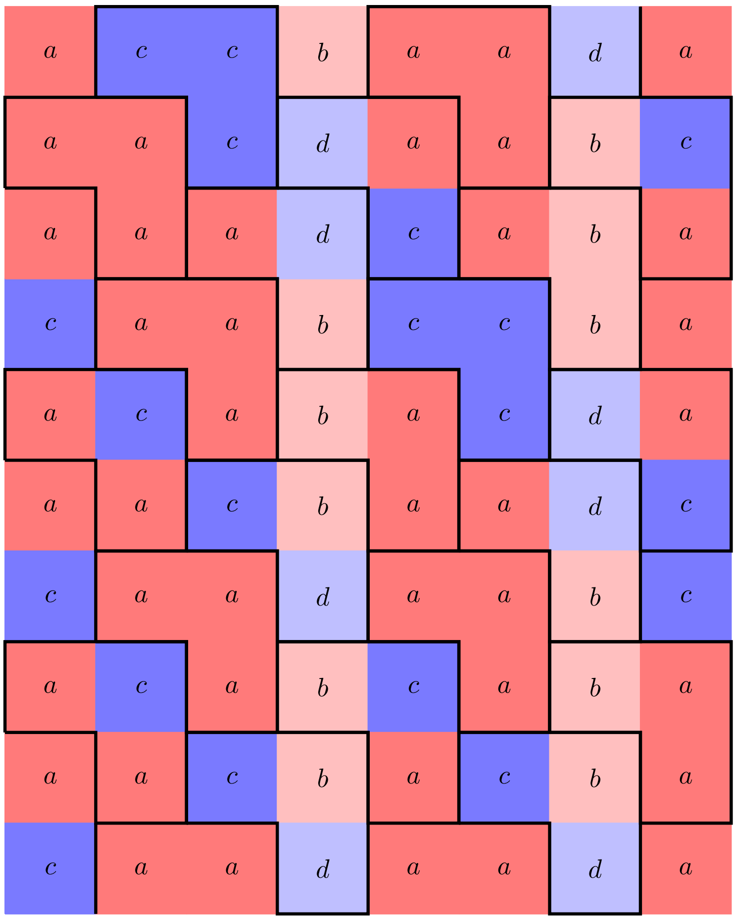
Espace des nombres premiers et pavage apériodique du plan par des triminos colorés (Denise Vella-Chemla, 21.5.2017)

On voudrait ici associer à un ensemble de règles de réécriture qu'on avait mises au jour dans le cadre de recherches d'une démonstration de la conjecture de Goldbach un pavage du plan euclidien par des triminos colorés.

Voici les triminos dont on dispose, au nombre de 16.



Voici un pavage du plan à l'aide de ces triminos.



Les couleurs sont à comparer aux couleurs associées aux décompositions des nombres pairs comme sommes de deux nombres impairs comme présenté sur le schéma ci-après :

- une décomposition de la forme *premier* + *premier* (lettre a) est colorée en rouge pâle ;
- une décomposition de la forme *composé* + *premier* (lettre b) est colorée en red!25 ;
- une décomposition de la forme *premier* + *composé* (lettre c) est colorée en gris pâle ;

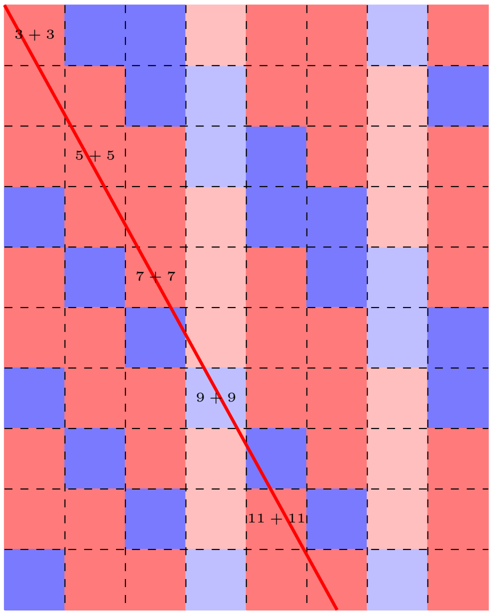
- et enfin, une décomposition de la forme *composé* + *composé* (lettre d) est colorée en vert.

$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$

Les couleurs des triminos, qu'on appelait les 16 règles, sont motivées par toutes les implications logiques qui font que si $n = x_1 + y_1 = (x_1 + 2) + (y_2 - 2)$ alors $n + 2 = (x_1 + 2) + y_1$. Cela correspond au fait que la couleur du carré en bas à droite de chaque trimino est complètement déterminée par les couleurs des deux carrés en haut du trimino[1].

On peut lire les décompositions triviales de Goldbach de la forme $2p = p + p$ sur une droite de coefficient directeur -2.

[1]Dit autrement, la couleur verte de la décomposition $9 + 15$ se déduit des couleurs grise et red!25 des décompositions $7+15$ et $9+13$ en prenant la "composante gauche" de la couleur de $9+13$ et la "composante droite" de la couleur de $7+15$.



Bibliographie

[1] D. Vella-Chemla, *Modéliser*, 31.10.2015, http://denise.vella.chemla.free.fr/champ-de-lettres.pdf.

[2] A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Dunod, 1990.

[3] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman and company, New York, 1987.