Je ne savais pas cela sur la série harmonique et sur la somme des inverses des racines carrées des entiers (Denise Vella-Chemla, mars 2024)

À cause de cette idée entêtante du $\dfrac{1}{2}$ qui apparaît dans l'hypothèse de Riemann, on a l'idée de programmer la somme des inverses des nombres de 1 à n, un entier donné, mais également, la somme des inverses des racines carrées de ces nombres.

On met les résultats de ces deux calculs, pour le premier, en regard du logarithme du nombre n, et pour le second, en regard du double de la racine carrée de n. Voici le programme python qu'on utilise pour effectuer les calculs :

```
import time
import math
from math import log, cos, pi, sqrt, e

tic = time.time()
somme1 = 1
somme2 = 1
nmax = 100000001
for n in range(2,nmax):
     somme1 = somme1+1/n
     somme2 = somme2+1/sqrt(n)
     if n == nmax-1:
          print('= ', n)
          print('somme des inverses des entiers jusqu a n = ',somme1)
          print('ln(n) = ', log(n))
          print('somme des inverses des racines des entiers jusqu a n = ',somme2)
          print('2*sqrt(n) = ', 2*sqrt(n))
tac = time.time()
print('execution en ',tac-tic, ' s.')
```

Le résultat de ce programme, qu'on ne fournit que pour la valeur finale de 10^8, mais dont les égalités s'avèrent vérifiées pour tous les nombres inférieurs à n est :

```
n = 100000000
somme des inverses des entiers jusqu a n = 18.997896413852555
ln(n)                                    = 18.420680743952367
somme des inverses des racines des entiers jusqu a n = 19998.53969549304
2*sqrt(n)                                            = 20000.0
execution en 30.247287034988403 s.
```

Le premier résultat :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \simeq \log x \ + \ \gamma$$

avec $\gamma = 0.5772...$, dite constante d'Euler-Mascheroni, est connu et démontré : la différence entre la série harmonique et le logarithme népérien converge asymptotiquement vers γ.

On ne sait pas encore si le second résultat :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \simeq 2\sqrt{n} + \gamma'$$

est connu, est vrai et si oui, s'il est démontré. La différence entre les deux résultats des calculs, égale à $\gamma' = 1.4603046$, pourrait faire penser[1] à une constante dite Constante de Porter, dont la valeur est 1.4670780794... ; Donald E. Knuth en a donné la valeur exacte (Voir ici : https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Porter).

[1]de loin, à une distance de 6 à 7 millièmes.