# Résoudre un système d'équations algébriques pour trouver un décomposant de Goldbach d'un nombre pair

Denise Vella-Chemla

27/10/2011

## 1 Rappels

La conjecture de Goldbach stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. On rappelle qu'un nombre premier impair $p$ est un décomposant de Goldbach de $n$ un nombre pair supérieur ou égal à 6 si $p$ est incongru* à $n$ selon tout module premier impair $p'$ inférieur à $\sqrt{n}$. En effet, dans le cas contraire, le complémentaire à $n$ de $p$ est composé.

*Exemple :* 19 est un décomposant de Goldbach de 98 car 19 est incongru à 98 selon 3, 5 et 7. Par contre, 3 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $3 \equiv 98 \ (mod\ 5)$ (ce qui correspond au fait que 5 divise $98-3$). 5 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $5 \equiv 98 \ (mod\ 3)$. 7 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $7 \equiv 98 \ (mod\ 7)$ (ce qui correspond au fait que 7 divise $98-7$, 7 est diviseur de 98). 11 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $11 \equiv 98 \ (mod\ 3)$. 13 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $13 \equiv 98 \ (mod\ 5)$. 17 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98 car $17 \equiv 98 \ (mod\ 3)$.

## 2 Modéliser la recherche des décomposants de Goldbach par des équations algébriques

Chercher un décomposant de Goldbach $p$ d'un nombre pair $n$ revient donc simplement à chercher un nombre qui vérifie les conditions suivantes : d'une part, il est premier et d'autre part, son complémentaire à $n$ est premier.

Lors de ces recherches autour de la conjecture de Goldbach, comme il s'agit de trouver les solutions entières d'équations, on a longuement buté sur un extrait de Galois qui écrit : *"Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$"*. Récemment, on a pu trouver sur la toile la référence [2] dans laquelle Libri explique sa méthode simple pour trouver les solutions entières d'une équation polynomiale et qui est fournie en annexe.

On réalise à ces lectures que les nombres premiers 3, 5, 7 *et* 11, par exemple, sont tous racines de l'équation polynomiale

$$(x-3)(x-5)(x-7)(x-11) = 0.$$

En développant le produit, on obtient l'équation polynomiale suivante :

$$x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0.$$

Les coefficients s'obtiennent ainsi :

$$26 = 3+5+7+11.$$
$$236 = 3.5+3.7+3.11+5.7+5.11+7.11.$$
$$886 = 3.5.7+3.5.11+3.7.11+5.7.11.$$
$$1155 = 3.5.7.11.$$

*On utilise le terme proposé par Gauss dans les Recherches Arithmétiques.

Plus généralement, pour exprimer que $x$, le nombre à chercher, est premier, on utilise une équation polynomiale de la forme suivante :

$$x^{\pi(n-2)-1} - \sigma_1.x^{\pi(n-2)-2} + \sigma_2.x^{\pi(n-2)-3} - \sigma_3.x^{\pi(n-2)-1} \ldots = 0$$

La plus grande puissance de $x$ est $\pi(n-2)-1$ parce que la décomposition $1+(n-1)$ n'est jamais considérée comme une décomposition de Goldbach†, le $-1$ servant à éliminer le nombre premier 2. Les nombres $\sigma_i$ désignent respectivement les sommes de produits de $i$ nombres premiers pris parmi tous les nombres premiers impairs considérés. Par exemple, $\sigma_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 ... = 3 + 5 + 7 + 11...$, $\sigma_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + ... + p_2p_3 + p_2p_4 + ...$ et le dernier sigma est le produit de tous les nombres premiers impairs inférieurs à $n-2$.

Pour exprimer que $n-x$, le complémentaire du nombre à chercher doit être l'un des nombres premiers 3, 5, 7 *ou* 11, on utilise la même équation polynomiale en remplaçant $x$ par $n-x$ ; si l'on considère les 4 premiers nombres premiers impairs seulement, l'équation polynomiale devient :

$$((n-x)-3)((n-x)-5)((n-x)-7)((n-x)-11) = 0.$$

En développant le produit, on obtient l'équation polynomiale suivante :

$$(n-x)^4 - 26(n-x)^3 + 236(n-x)^2 - 886(n-x) + 1155 = 0.$$

L'élévation aux différentes puissances du monôme $n-x$ donne les résultats ci-dessous :

$$\begin{array}{l} (n-x)^4 = x^4 - 4nx^3 + 6n^2x^2 - 4n^3x + n^4. \\ (n-x)^3 = -x^3 + 3nx^2 - 3n^2x + n^3. \\ (n-x)^2 = n^2 - 2nx + x^2. \end{array}$$

On reconnaît les coefficients du binôme $C_i^j$ dans l'élévation de $n-x$ à la puissance $i$.

Si on développe et qu'on regroupe ensemble les coefficients concernant une même puissance de $x$, on obtient :

$$x^4 + (-4n+26)x^3 + (6n^2-78n+236)x^2 + (-4n^3+78n^2-472n+886)x + (n^4-26n^3+236n^2-886n+1155) = 0$$

On reconnaît dans la dernière parenthèse le polynôme initial dans lequel $x$ a été remplacé par $n$. Puis pour les coefficients des puissances supérieures de $x$, on voit qu'on dérive successivement le polynôme initial puis les polynômes obtenus, qu'on prend l'opposé du résultat à chaque fois et qu'on divise successivement les résultats intermédiaires par 2, 3, etc.

Pour le degré 4, le polynôme initial est :

$$n^4 - 26n^3 + 236n^2 - 886n + 1155$$

On le dérive et on en prend l'opposé :

$$-4n^3 + 78n^2 - 472n + 886$$

On dérive ce dernier, on en prend l'opposé et on divise le résultat par 2 :

$$6n^2 - 78n + 236$$

On dérive ce dernier, on en prend l'opposé et on divise le résultat par 3 :

$$-4n + 26$$

Les coefficients d'expression $\frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{n!}$ sont appelés coefficients du développement de Taylor.

† même si Cantor la comptait comme telle.

On est donc systématiquement ramené au système d'équations à deux équations de degré $i$ suivant, dont il faudrait réussir à prouver qu'il admet systématiquement au moins une solution :

$$\begin{cases} P(x) : x^{\pi(n-2)-1} - \sigma_1.x^{\pi(n-2)-2} + \sigma_2.x^{\pi(n-2)-3} - \sigma_3.x^{\pi(n-2)-1} \ldots = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=\pi(n-2)-1} \frac{(-1)^i P^{(i)}(n)}{i!} x^i = 0 \end{cases}$$

Les résultats de la théorie de Galois sur la résolubilité des équations polynomiales ne pourraient-ils pas être utilisés ici pour montrer que notre système de deux équations admet toujours une solution en $x$ au moins ?...[‡]

# 3 Exemples

Traitons les exemples $n = 8$ et $n = 10$. Il n'y a que trois nombres premiers impairs inférieurs à $n$, $3,\ 5$ *et* $7$.
L'équation polynomiale $(x-3)(x-5)(x-7) = 0$ se développe en $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$.
L'équation polynomiale portant sur $n - x$ se développe quant à elle en :
$-x^3 + (3n-15)x^2 + (-3n^2 + 30n - 71)x + (n^3 - 15n^2 + 71n - 105) = 0$.
Si on remplace $n$ par 8, on aboutit au système :

$$\begin{cases} x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0 \\ -x^3 + 9x^2 - 23x + 15 = 0 \end{cases}$$

3 et 5 sont les seules solutions de ce système. Ce sont les décomposants de Goldbach de 8.

Si on remplace $n$ par 10, on aboutit au système :

$$\begin{cases} x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0 \\ -x^3 + 15x^2 - 71x + 105 = 0 \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes, 3 et 5 et 7 sont solutions de ce système, et sont décomposants de Goldbach de 10.

# 4 Passer d'un degré au degré supérieur

Considérons d'abord les deux premières équations des deux systèmes pour les degrés 4 et 5. On passe de l'équation :

$$x^4 - \sigma_{1,4}x^3 + \sigma_{2,4}x^2 - \sigma_{3,4}x + \sigma_{4,4} = 0$$

à l'équation :

$$x^5 - \sigma_{1,5}x^4 + \sigma_{2,5}x^3 - \sigma_{3,5}x^2 + \sigma_{4,5}x - \sigma_{5,5} = 0$$

Les coefficients de l'équation de degré 5 ont été obtenus ainsi à partir de ceux de l'équation de degré 4.

$$\begin{array}{lll} \sigma_{1,5} = \sigma_{1,4} & +p_5 \\ \sigma_{2,5} = \sigma_{2,4} & +\sigma_{1,4}.p_5 \\ \sigma_{3,5} = \sigma_{3,4} & +\sigma_{2,4}.p_5 \\ \sigma_{4,5} = \sigma_{4,4} & +\sigma_{3,4}.p_5 \\ \sigma_{5,5} = & \sigma_{4,4}.p_5 \end{array}$$

Plus généralement, si $p_i$ désigne le $p^{ième}$ nombre premier impair,

$$\begin{array}{ll} \sigma_{1,i} = \sigma_{1,i-1} & +p_i \\ \sigma_{2,i} = \sigma_{2,i-1} & +\sigma_{1,i-1}.p_i \\ \sigma_{3,i} = \sigma_{3,i-1} & +\sigma_{2,i-1}.p_i \\ \vdots & \\ \sigma_{i-1,i} = \sigma_{i-1,i-1} & +\sigma_{i-2,i-1}.p_i \\ \sigma_{i,i} = & +\sigma_{i-1,i-1}.p_i \end{array}$$

[‡]En annexe, on fournit les équations polynomiales de degré 5 qui permettent laborieusement de trouver les décomposants de Goldbach des nombres 14 et 16 qui ont comme nombres premiers impairs inférieurs à eux les nombres premiers $3, 5, 7, 11$ et 13 (!).

Il faudrait trouver également comment on passe de la deuxième équation du système à deux équations d'un certain degré à la deuxième équation du système de degré immédiatement supérieur.

Peut-être est-ce à cause de ce mécanisme de passage d'un degré au degré immédiatement supérieur que les équations sont toujours résolubles ?...

# 5 Pgcd des polynomes

Dans la mesure où l'on cherche une racine $r$ qui vérifie et la première et la deuxième équation, le fait que les deux polynômes en question aient un pgcd différent de 1 assurerait l'existence d'une telle racine.

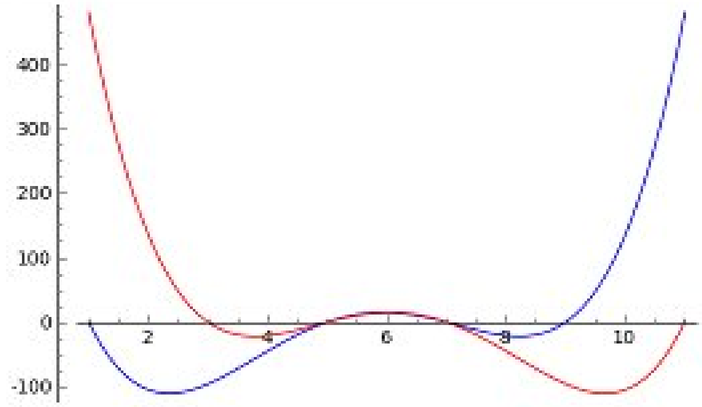
Avec l'outil Sage, on expérimente cette idée à la recherche des décomposants de Goldbach du nombre pair 14.

$Sage : decomp14 = var('x')$
$Sage : eq1 = x^5 - 39 * x^4 + 574 * x^3 - 3954 * x^2 + 12673 * x - 15015$
$Sage : eq2 = -x^5 + 31 * x^4 - 350 * x^3 + 1730 * x^2 - 3489 * x + 2079$
$Sage : eq1.gcd(eq2)$
$Sage :\ x^3 - 21 * x^2 + 131 * x - 231$
$Sage : eq4 = x^3 - 21 * x^2 + 131 * x - 231 == 0$
$Sage : solve([eq4], x)$
$Sage :\ [x == 7, x == 11, x == 3]$

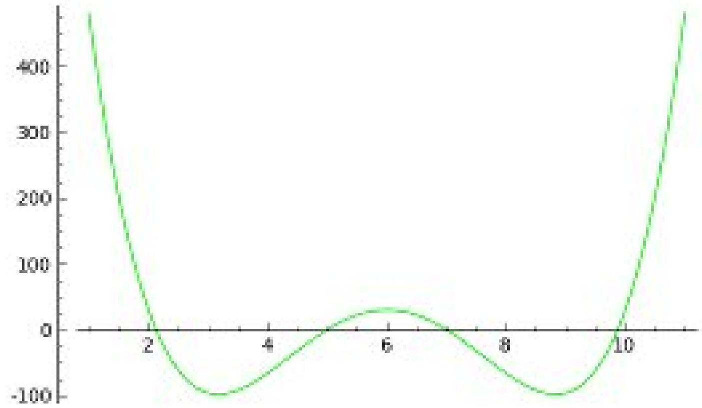
# 6 Somme des polynômes

Dans la mesure où les deux courbes algébriques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite d'ordonnée $n/2$ (puisque $x = n/2 = n - n/2$), on peut voir apparaître directement les décomposants de Goldbach comme racine du polynôme qui est la somme des deux polynômes. On découvre les décomposants de Goldbach sur les visualisations ci-dessous, concernant les nombres pairs 12 et 18. La somme en question est systématiquement une fonction polynomiale paire.

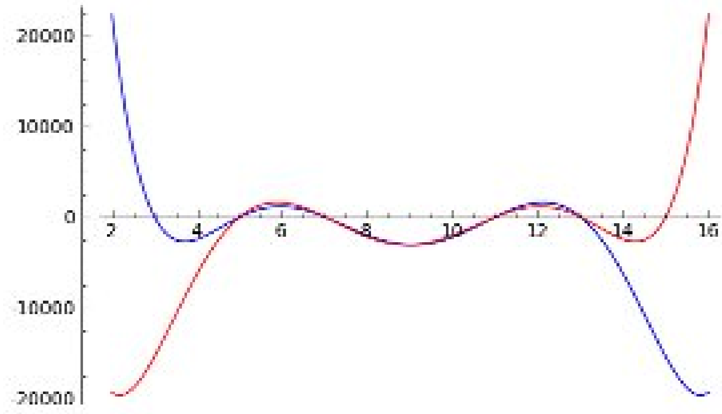
```
f=plot(x^4-22*x^3+164*x^2-458*x+315,(x,1,11),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(x^4-26*x^3+236*x^2-886*x+1155,(x,1,11),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```



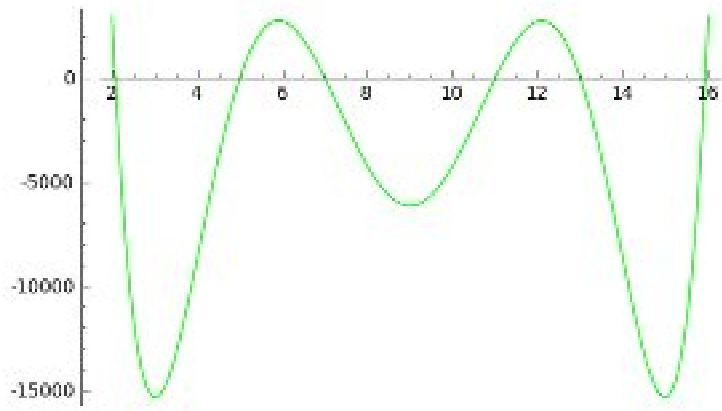

```
h=plot(2*x^4-48*x^3+400*x^2-1344*x+1470,(x,1,11),rgbcolor=(0,1,0))
show(h)
```



```
x=var('decomp18')
f=plot(x^6-56*x^5+1237*x^4-13712*x^3+79891*x^2-230456*x+255255,(x,2,16),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(x^6-52*x^5+1057*x^4-10552*x^3+52891*x^2-118420*x+75075,(x,2,16),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```




```
h=plot(2*x^6-108*x^5+2294*x^4-24264*x^3+132782*x^2-348876*x+330330,(x,2,16),rgbcolor=(0,1,0))
show(h)
```




## Bibliographie

[1], **Evariste Galois**, *Sur la théorie des nombres*, Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, tome XIII, page 428, juin 1830. Note de J. Liouville : ce mémoire fait partie des recherches de M. Galois sur la théorie des permutations et des équations algébriques.

[2], **Guillaume Libri**, *Mémoire sur la théorie des nombres*, in *Mémoires de mathématiques*, extraits du *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, publié par A.L. Crelle, Berlin, 1835, p.44.

## Annexe : exemples de degrés 4 et 5

Si on résoud les équations dont on a calculé les coefficients en remplaçant $n$ successivement par les valeurs 12 (équations de degré 4 car il y a 4 nombres premiers impairs inférieurs à 12 qui sont $3, 5, 7$ et 11) puis par les valeurs 14 et 16 pour $n$ (équations polynomiales de degré 5 car on a rajouté le nombre premier impair 13) avec un outil tel que l'outil libre Sage qui permet la résolution d'équations polynomiales, on arrive à résoudre les systèmes ci-dessous.

Pour $n = 12$, il faut résoudre le système :

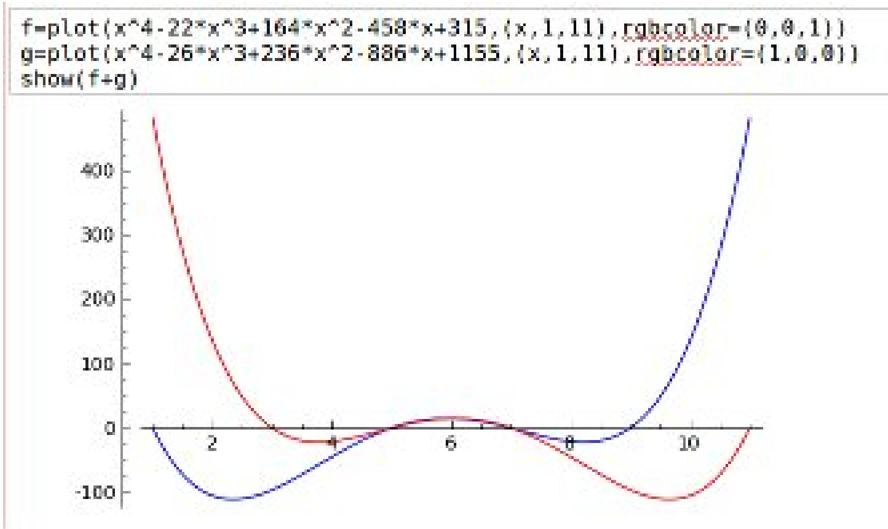
$$\left\{ \begin{array}{l} x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0 \\ x^4 + (26-4n)x^3 + (6n^2 - 78n + 236)x^2 + (-4n^3 + 78n^2 - 472n + 886)x + (n^4 - 26n^3 + 236n^2 - 886n + 1155) = 0 \end{array} \right.$$

qui se ramène au système :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4 - 26x^3 + 236x^2 - 886x + 1155 = 0 \\ x^4 - 22x^3 + 164x^2 - 458x + 315 = 0 \end{array}\right.$$

Les seules valeurs de $x$ qui conviennent sont bien 5 et 7 qui sont bien les décomposants de Goldbach de 12.

La visualisation des deux polynômes par l'outil Sage est fournie ci-dessous :




Calculons les équations pour le degré 5 (nombres premiers impairs 3, 5, 7, 11 et 13).

$$x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 10725 = 0$$

avec

$3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 39$
$3.5 + 3.7 + 3.11 + 3.13 + 5.7 + 5.11 + 5.13 + 7.11 + 7.13 + 11.13 = 574$
$3.5.7 + 3.5.11 + 3.5.13 + 3.7.11 + 3.7.13 + 3.11.13 + 5.7.11 + 5.7.13 + 5.11.13 + 7.11.13 = 3954$
$3.5.7.11 + 3.5.7.13 + 3.5.11.13 + 3.7.11.13 + 5.7.11.13 = 12673$
$3.5.7.11.13 = 15015.$

En remplaçant $x$ par $n-x$, on obtient le polynôme suivant dont on cherche quelles valeurs de $x$ l'annulent.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & & & -x^5 \\
 & & & & +(5n & -39) & x^4 \\
 & & & +(-10n^2 & +156n & -574) & x^3 \\
 & & +(10n^3 & -234n^2 & +1722n & -3954) & x^2 \\
 & +(-5n^4 & +156n^3 & -1722n^2 & +7908n & -12673) & x^1 \\
+(n^5 & -39n^4 & +574n^3 & -3954n^2 & +12673n & -15015) &
\end{array}$$

Pour $n = 14$ ou $n = 16$, il faut résoudre le système :

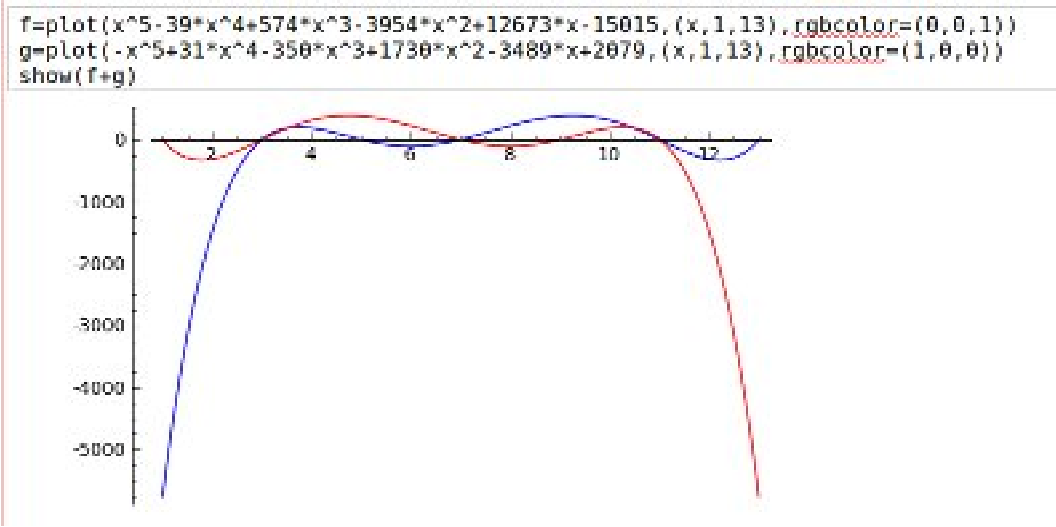
$$\left\{\begin{array}{l} x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\ -x^5 + (5n-39)x^4 + (-10n^2 + 156n - 574)x^3 + (10n^3 - 234n^2 + 1722n - 3954)x^2 + \\ \qquad (-5n^4 + 156n^3 - 1722n^2 + 7908n - 12673)x + (n^5 - 39n^4 + 574n^3 - 3954n^2 + 12673n - 15015) = 0 \end{array}\right.$$

qui se ramène dans le cas de $n = 14$ au système :

$$\left\{\begin{array}{l} x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\ -x^5 + 31x^4 - 350x^3 + 1730x^2 - 3489x + 2079 = 0 \end{array}\right.$$

Les seules valeurs de $x$ qui conviennent sont $3, 7$ et 11, qui sont bien les décomposants de Goldbach de 14.

La visualisation des deux polynômes par l'outil Sage est fournie ci-dessous :

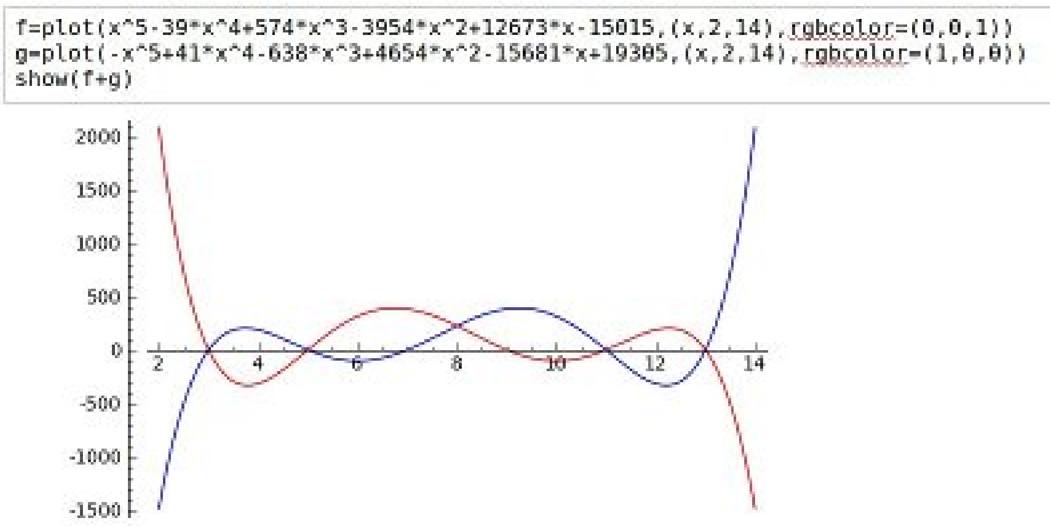



Pour $n = 16$, le système final à résoudre est :

$$\begin{cases} x^5 - 39x^4 + 574x^3 - 3954x^2 + 12673x - 15015 = 0 \\ -x^5 + 41x^4 - 638x^3 + 4654x^2 + 15681x - 19305 = 0 \end{cases}$$

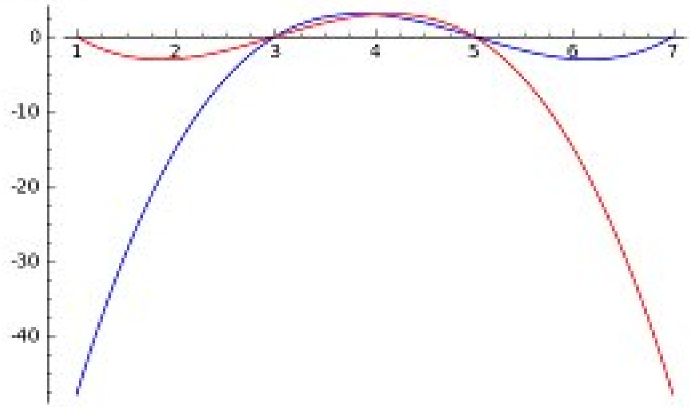
Le pgcd de ces deux polynômes est $x^4 - 32x^3 + 350x^2 - 1504x + 2145$. Les seules valeurs de $x$ qui conviennent sont $3, 5, 11$ et $13$, qui sont bien les décomposants de Goldbach de 16.

La visualisation des deux polynômes par l'outil Sage est fournie ci-dessous :

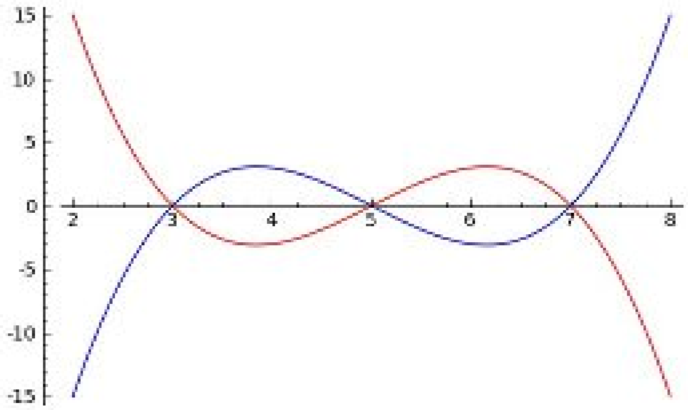



Fournissons enfin les visualisations par l'outil Sage des polynômes permettant de trouver les décomposants de Goldbach des nombres pairs 8, 10 et 18.

```
f=plot(x^3-15*x^2+71*x-105,(x,1,7),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(-x^3+9*x^2-23*x+15,(x,1,7),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```




```
f=plot(x^3-15*x^2+71*x-105,(x,2,8),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(-x^3+15*x^2-71*x+105,(x,2,8),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```




```
f=plot(x^6-56*x^5+1237*x^4-13712*x^3+79891*x^2-230456*x+255255,(x,1,17),rgbcolor=(0,0,1))
g=plot(x^6-52*x^5+1057*x^4-10552*x^3+52891*x^2-118420*x+75075,(x,1,17),rgbcolor=(1,0,0))
show(f+g)
```